

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 36 • HEFT 8 • DEZEMBER 1939

## *Die Massenschwächungskoeffizienten monochromatischer Röntgenstrahlen von 24 Elementen zwischen C(6) und Ce(58) für Wellenlängen von 0,1279 bis 1,433 Å Von Wilhelm Wrede.*

(Aus dem Institut für medizinische Physik der Universität Göttingen)

(Mit 2 Abbildungen)

1.

Im Rahmen des Programmes, die Massenschwächungskoeffizienten monochromatischer Röntgenstrahlen für möglichst viele Wellenlängen und Elemente nach dem Filterdifferenzverfahren nach Küstner<sup>1)</sup> zu untersuchen, dienten im Institut für medizinische Physik bereits bei Grosskurth<sup>2)</sup> Folien und Bleche, bei Schulz<sup>3)</sup> und Biermann<sup>4)</sup> im Hochvakuum auf feine Unterlagen aufgedampfte Metalle, bei I. Müller<sup>5)</sup> wäßrige Lösungen von Verbindungen, bei Hansen<sup>6)</sup> Verbindungen, die sowohl im flüssigen wie auch im gasförmigen Zustand untersucht werden konnten, und bei Küstner<sup>7)</sup> und in einigen Fällen auch bei Rindfleisch<sup>8)</sup> in Filterpapier aufgesogene und dann getrocknete Lösungen von Verbindungen. Vergleicht man die Ergebnisse verschiedener Autoren für dieselben Elemente, so findet man zwar im allgemeinen Übereinstimmung der Massenschwächungskoeffizienten auf einige Prozent. Dabei zeigt sich aber die auffällige Erscheinung, daß sich die Meßpunkte eines Verfassers für irgendein bestimmtes Element sehr nahe einer glatten Kurve einfügen, obgleich im untersuchten Wellenlängenbereich Absorbenten ganz verschiedener Dicke benutzt wurden. Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, daß die Methodik der Absorptionsmessung als solche doch recht genau zu arbeiten erlaubt, und daß die Unterschiede in den Ergebnissen der verschiedenen Autoren im wesentlichen der Unvollkommenheit des absorbierenden Materials zuzuschreiben ist. Dieses scheint auch der Befund von Rindfleisch<sup>8)</sup> zu bestätigen. Wie alle Effekte im Röntgengebiet beim Übergang von Element zu Element durch stetige Funktionen dargestellt werden können, so fand auch Rindfleisch, daß sich für die Größe der  $K$ -Absorptionssprünge

in Abhängigkeit von der Atomnummer  $Z$  mit einer Meßgenauigkeit von  $\pm 1,8\%$  eine glatte Funktion ergibt, vorausgesetzt, daß man beiderseits der  $K$ -Kante mit demselben Filterexemplar arbeitet, wodurch sich dessen Dicke oder Masse pro Flächeneinheit herauskürzt, während bei Verwendung verschiedener Exemplare beiderseits der  $K$ -Kante eine Streuung von etwa  $\pm 8\%$  auftritt. Auch dieser Umstand spricht für einen großen Einfluß des absorbierenden Materials. — Die vorliegende Arbeit hatte sich daher zur Aufgabe gestellt, eine große Anzahl von Elementen von möglichst hohem Reinheitsgrade so genau zu untersuchen, daß ein Einblick in den systematischen Verlauf der Schwächungskurven beim Fortschreiten von Element zu Element gewonnen werden kann.

## 2. Das Material

Bei Kohle (6), Aluminium (13) und Schwefel (16) wurden dieselben Präparate, die schon Grosskurth benutzt hatte<sup>2)</sup>, genommen. Beim Magnesium wurden teils Scheiben verwandt, die aus größeren Blöcken herausgedreht wurden, teils gewalzte Bleche, die von Schuchardt bezogen waren. Dabei zeigte sich wieder in Bestätigung der oben ausgesprochenen Vermutung eines großen Materialeinflusses das Folgende: zwei Magnesiumscheiben, die aus demselben Gußblock herausgeschnitten waren, lieferten immer zu niedrige Werte des Massenschwächungskoeffizienten, obgleich weder photographische Röntgenaufnahmen noch Durchleuchtungen auf dem Fluoreszenzschirm irgendwelche Lufteinschlüsse erkennen ließen. Daß dennoch solche nicht wahrnehmbare Einschlüsse vorhanden gewesen sein müssen, beweist die Tatsache, daß die Verwendung übereinandergelegter gewalzter Magnesiumbleche von etwa derselben Gesamtdicke Werte lieferte, die mit den anderen Meßpunkten in guter Übereinstimmung standen. — Alle anderen Stoffe wurden in Pulverform gebraucht. Soweit sie nicht von vornherein als feinsies Pulver bezogen worden waren, wurden sie im Mörser, soweit nötig, sogar im Achatmörser, so vollkommen wie möglich zerkleinert. Das Wissenswerte über die verwendeten Präparate gibt die Tab. 1 an.

Da aus dem gemessenen Intensitätsverhältnis

$$(1) \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\mu d}$$

das  $\mu d$  folgt, aber der Massenschwächungskoeffizient  $\mu/\rho$  gesucht wird ( $\rho$  = Dichte), so ist  $\mu d$  noch durch

$$(2) \quad \rho d = \frac{m}{F}$$

Tabelle 1

Verbindung	Erhalten von	Reinheitsgrad	Beschaffenheit
C	Prof. Goetz Pasadena	0,03% Si O <sub>2</sub> 0,01% Fe	Scheiben aus Kohleklotz gedreht
LiF	K	rein	pulvrig
Mg	Sch		aus Gußstücken und gewalzten Bleichen gedreht
Al	O	0,015% Si 0,3 % Fe	Scheiben aus Klotz gedreht
S	Sch	pro analysi	vakuumgeschmolzen, zu Scheibengedreht
NH <sub>4</sub> Cl	K	pro analysi	krist.
CaH <sub>2</sub>	K	rein	gekörnt
TiO <sub>2</sub>	K	rein	krist.
NH <sub>4</sub> VO <sub>3</sub>	K	rein	pulvrig
Cr met.	Sch		gekörnt
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	K	reinst	pulvrig
Mn met.	Sch		gezossen
MnO <sub>2</sub>	K	pro analysi	gekörnt
Fe	Sch		pulvrig
(COO) <sub>2</sub> Fe + 2 H <sub>2</sub> O	Sch		pulvrig
COCO <sub>3</sub>	K	reinst Ni-frei	pulvrig
Zn	K	pro analysi	pulvrig
As <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	K	pro analysi	gepulvert
Se	K	reinst	in Perlen
NH <sub>4</sub> Br	K		krist.
SrO	K	„Kahlbaum“	pulvrig
ZrO <sub>2</sub>	K	rein	gekörnt
Sb <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	K	„Kahlbaum“	pulvrig
K <sub>2</sub> TeO <sub>3</sub>	K	rein	krist.
CHJ <sub>3</sub>	K		pulvrig
CeO <sub>2</sub>	K	reinst	krist.

K = Schering-Kahlbaum, Berlin

Sch = Dr. Theod. Schuchardt, Görlitz

O = Osram G. m. b. H., Berlin

zu dividieren, wobei  $m$  die gewogene Masse und  $F$  die Fläche des Absorbens ist. Da die Kohle-, Magnesium-, Aluminium- und Schwefelpräparate kreisrund gedreht waren, ließen sich ihre Flächen leicht aus ihren Durchmessern ermitteln. Die übrigen, pulverförmigen Stoffe wurden in Aluminiumküvetten gefüllt.

### 3. Die Küvetten

Diese bestanden aus Aluminiumzylindern von 1,5 mm Wandstärke und 3,6 cm Durchmesser, der mit Hilfe einer Präzisionslehre auf ein Hundertstelmillimeter genau bestimmt werden konnte, so daß sich für die Fläche  $F = 10,179 \text{ cm}^2$  eine Unsicherheit von nur einem Promille ergab. Als Fenster dienten die bewährten, 0,5 mm dicken Kohlemembranen von Mix und Genest, deren jede mit Hilfe einer Überwurf-

mutter aus Aluminium gegen die Stirnflächen der Küvetten gepreßt wurde. Zur Füllung wurde die Küvette mit der einen Kohlemembrane verschlossen, die dann als Bodenfläche diente. Das Pulver wurde so reichlich eingefüllt, daß sich oben ein Haufen bildete. Erschütterung durch Klopfen sorgte für gleichmäßige Verteilung der Masse; dann wurde mit einer scharfen Kante der noch überschüssige Haufen abgestrichen, die andere Membrane aufgelegt und unter geringem Druck mit Hilfe eines Überwurfringes festgeschraubt. Die Vollkommenheit der Füllung wurde durch Durchleuchtungen vor und nach der Meßreihe kontrolliert. Durch Wägung der Küvette vor und nach der Füllung wurde die Masse  $m$  des Absorbenten festgestellt. Bei der Messung von  $I_0$  wurden zwei Kohlemembranen in den Strahlengang gebracht, wodurch sich der Einfluß des Fenstermaterials heraus hob.

Wie Grosskurth<sup>2)</sup> zeigen konnte, besitzt der Fehler des Meßergebnisses bei  $\frac{I}{I_0} \sim 0.3$  ein Minimum; indessen ist er von diesem Minimalwert nur wenig verschieden, wenn man  $I/I_0$  zwischen 0,2 und 0,5 hält. Man muß also für ein gegebenes absorbierendes Material die Länge der Küvette der jeweiligen Wellenlänge anpassen. Während man nun die Küvetten beliebig lang wählen kann, läßt die erforderliche Meßgenauigkeit nicht zu, die Länge kürzer als 1 mm zu nehmen, da sonst eine gleichmäßige Verteilung des Materials über die Fläche nicht mehr gewährleistet werden kann. Hierdurch wurde die Ausdehnung der Messungen nach langen Wellen hin bei jedem untersuchten Element beschränkt.

#### IV. Das Meßverfahren

Zur Erzeugung monochromatischer Röntgenstrahlen diente das Filterdifferenzverfahren nach Küstner<sup>1)</sup>. Durch Einschalten von Selektivfiltern wurden die  $\beta$ - $\gamma$ -Linien weitgehend herabgedrückt. Ihre noch verbleibende Restintensität wurde nach der von Küstner<sup>9)</sup> angegebenen Korrektur so vollkommen ausgeschaltet, daß das reine  $\alpha\alpha'$ -Dublett als alleinige wirksame monochromatische Strahlung angesehen werden kann. Es hat sich inzwischen durch Versuche, die von anderer Seite im Institut durchgeführt worden sind, herausgestellt, daß für schweratomige Strahler von etwa der Atomnummer 70 ab das Filterdifferenzverfahren nicht mehr erforderlich ist. Bei so schweratomigen Sekundärstrahlern ist die Intensität der Streustrahlung im Vergleich zur  $K$ -Strahlung so verschwindend klein, daß sie dieser gegenüber zumindest solange vernachlässigt werden kann, als man mit Selektivfiltern arbeitet; denn der Hauptanteil der an sich geringen



Streuintensität fällt dann auf den *K*-Ast des Selektivfilters, wodurch er wirkungslos wird. Diese Behauptungen wurden durch das Ergebnis folgenden Versuches bekräftigt: Als Strahler diente Blei von 0,1 mm Dicke mit einem Selektivfilter aus Gold. Es wurde nun das  $I/I_0$  für ein und denselben Absorbenten aus Cu 10 mal hintereinander gemessen, und zwar nach dem Filterdifferenzverfahren, wobei die Gleichspannung an der Röhre 180 kV betrug und das Differenzfilter aus 4 mm Cu bestand. Als Mittel der außerordentlich wenig schwankenden Einzelwerte ergab sich  $\frac{I}{I_0} = 0,4506$ . Dann wurde bei demselben Bleistrahler und Goldselektivfilter das  $I/I_0$  an demselben Cu-Absorbenten direkt (also ohne Differenzfilter) gemessen, wobei sich als Mittel aus zwölf Beobachtungen  $\frac{I}{I_0} = 0,4501$  ergab. Der Unterschied beträgt nur 0,1%, was innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Verwendet man dickere Bleistrahler, so nimmt die Ausbeute an *K*-Strahlung zu; bei 0,4 mm Blei tritt indessen schon fast Sättigung ein. Um zu prüfen, ob nicht etwa bei einem sehr dicken Strahler die Streustrahlung wieder störend in Erscheinung tritt, wurde der oben geschilderte Versuch mit 0,8 mm dickem Blei wiederholt. Es fand sich hier derselbe Unterschied von 0,1% im gleichen Sinne. Verwendet man statt eines elementaren Strahlers eine Verbindung mit leichtatomigen Komponenten, so könnte man vermuten, daß die verhältnismäßig starke Streustrahlung leichter Stoffe eine Differenz in den Ergebnissen beider Verfahren bewirkt. Um das zu prüfen, wurde der Versuch mit einem  $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ -Strahler wiederholt. Hier lagen die Messungen nur um 0,05% in demselben Sinne auseinander. Man erkennt also, daß man ohne Gefahr bei schweratomigen Strahlern auf die Filterdifferenzmessung verzichten kann. Dieser Umstand ist von großer Bedeutung, denn durch den Verzicht auf das Differenzfilter gewinnt man eine Steigerung der monochromatischen Strahlung auf etwa das 6- bis 7fache. Da dieser Tatbestand erst gegen Ende der Untersuchungen bekannt wurde, ist der größte Teil dieser Messungen auch bei schweratomigen Strahlern noch nach den Filterdifferenzverfahren durchgeführt wurden.

#### V. Meßanordnung

Als Röntgenröhre diente ein Doglasrohr in Tutohaube, das an einer Stabilvoltanlage mit hochgespanntem Gleichstrom betrieben wurde. Die Ionisation wurde bei langen Wellen in einer Luftkammer, bei kurzen in einer Zinnkammer gemessen, wie sie Grosskurth<sup>2)</sup> beschrieben hat. Die Kammerelektrode und der Faden eines Wulfschen

Die beobachteten Werte  $\mu/\rho$ . Der Index „el.“ bedeutet Messung am Element.

Strahler	$\lambda_{\text{an}}$	C	F	Mg	Al	S	Cl	Ca	Ti	V	Cr	Cr <sub>el.</sub>	Mn	Mn <sub>el.</sub>
92 U	0,1279	0,1545	0,1667	0,1593	0,1551	0,2014	0,242	0,2793	0,2904	0,3219	0,3394	0,3330	0,3570	0,3570
90 Th	0,1355	0,1544	0,1678	0,1607	0,1589	0,2142	0,256	0,3097	0,2881	0,3570	—	—	0,3954	—
83 Bi	0,1623	0,1574	0,1825	0,1914	0,1849	0,2600	0,3426	0,4280	0,4440	0,4880	0,5699	0,5818	0,5860	0,5860
82 Pb	0,1663	0,1575	0,1821	0,1948	0,1920	0,2705	0,3496	0,4497	0,4716	0,5280	0,6139	0,6193	0,6200	0,6200
81 Tl	0,1715	0,1592	0,1851	0,2005	0,1972	0,2768	0,3635	0,4682	0,5041	0,5491	0,6460	0,6499	0,6693	0,6693
80 Hg	0,1765	0,1624	0,1861	0,2020	0,2008	0,2929	0,3767	0,4931	0,5410	0,5856	0,6925	0,6987	0,7092	0,7200
79 Au	0,1813	0,1619	0,1895	0,2093	0,2094	0,3070	0,3988	0,5144	0,5715	0,6154	0,7400	0,7376	0,7716	0,7800
78 Pt	0,1868	0,1642	0,1937	0,2160	0,2168	0,3172	0,4227	0,5508	0,6175	0,6993	0,7928	0,7950	0,8327	0,8360
75 Re	0,2045	0,1671	0,2012	0,2320	0,2368	0,3604	0,4727	0,6399	0,7417	0,7834	0,9370	0,9670	1,0084	0,9920
74 W	0,2103	0,1685	0,2045	0,2480	0,2528	0,3910	0,5151	0,6984	0,8346	0,8676	1,0304	1,0750	1,1031	1,1031
73 Ta	0,2162	0,1687	0,2077	0,2558	0,2652	0,4107	0,5557	0,7416	0,8826	0,9087	1,1296	1,1504	1,1971	1,2000
62 Sm	0,3100	0,1987	0,2796	0,4649	0,4996	0,9026	1,1581	1,8194	2,1945	2,2445	—	—	3,0160	2,9600
60 Nd	0,3329	0,2065	0,3035	0,5135	—	1,0826	1,3630	2,0908	2,6203	2,7737	3,2374	3,2730	3,6076	3,6000
59 Pr	0,3460	0,2141	0,3245	0,5977	—	1,2103	1,5225	2,3043	2,9367	3,0636	3,6235	3,7047	3,9660	4,1130
58 Ce	0,3580	0,2178	0,3339	0,6440	0,7184	1,3467	1,6608	2,5429	3,1855	3,4555	3,9350	3,9751	4,2636	4,2700
57 La	0,3716	0,2233	0,3528	—	—	1,4885	1,8272	2,8354	3,6170	3,8183	4,2471	4,3169	4,6723	4,6800
56 Ba	0,3860	0,2334	0,3932	0,7619	—	1,6530	2,0763	3,1220	3,9990	4,3623	4,8213	—	5,1922	5,2000
55 Cs	0,4011	0,2412	0,4172	0,8306	—	1,8257	2,3383	3,4629	4,3775	4,6363	5,2467	—	5,9607	5,9100
53 J	0,4340	0,2576	0,4826	1,0325	1,3017	2,2744	2,9357	4,4276	5,5500	6,0392	6,6725	—	7,4007	7,4000
52 Te	0,4519	0,2672	0,5240	1,1337	—	2,6937	3,2974	4,9757	6,1945	6,6129	7,4591	—	8,4147	8,3700
51 Sb	0,4708	0,2797	0,5796	1,3366	1,6433	2,9029	3,5694	5,5940	6,9683	7,5592	8,5593	—	9,4692	9,4700
50 Sn	0,4911	0,2979	0,6359	1,4876	1,8639	3,3021	4,2206	6,3118	7,9129	8,2524	9,6042	—	10,276	10,200
49 In	0,5125	0,3149	0,7019	1,7647	—	3,6843	4,6374	7,0358	8,8784	9,4998	11,086	—	11,575	11,570
48 Cd	0,5353	0,3345	0,7797	2,0297	—	4,2309	5,4424	8,0535	10,056	10,718	12,606	—	13,530	13,530
47 Ag	0,5597	0,3565	0,8697	2,2769	2,7252	4,8199	6,0877	9,1602	11,459	12,068	14,101	—	14,751	14,750
46 Pd	0,5857	0,3890	0,9900	2,6273	—	5,4927	6,9916	10,356	13,170	13,781	15,973	—	17,984	17,980
45 Rh	0,6135	0,4215	1,1035	3,0382	—	6,0814	7,8114	11,594	14,995	15,491	18,118	—	20,941	20,940
44 Ru	0,6433	0,4508	1,2248	3,3680	—	7,0394	8,7888	12,991	17,130	17,713	20,887	—	24,915	24,910
42 Mo	0,7062	0,5601	1,6410	4,6377	5,4395	9,2963	11,609	—	21,702	23,700	27,119	—	—	—
41 Nb	0,7460	0,6300	1,9899	5,2020	—	10,425	13,241	—	25,948	28,025	—	—	—	—
40 Zr	0,7857	0,7040	2,2323	6,1389	—	12,397	15,523	—	—	—	—	—	—	—
39 Y	0,8294	—	2,5364	7,0201	—	14,175	—	—	—	—	—	—	—	—
38 Sr	0,8758	0,9080	3,0025	8,5210	—	17,164	—	—	—	—	—	—	—	—
37 Rb	0,9250	1,0354	3,5422	9,8624	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
35 Br	1,0389	1,4263	4,9391	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
34 Se	1,1037	1,6947	5,8561	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
33 As	1,1747	2,0062	7,0565	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
32 Ge	1,253	2,3990	8,5562	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
31 Ga	1,337	2,9291	10,225	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30 Zn	1,4333	3,5903	12,590	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Fadenelektrometers waren mit dem Innenbelag eines Harmsschen Kondensators verbunden; durch Anlegen einer fein regulierbaren Spannung an den Mittelbelag desselben konnte der durch Ionisation bewirkte Fadenablauf auf dem Wege der Influenz reproduziert werden; die an einem Präzisionsvoltmeter ablesbare Spannung diente dabei in bekannter Weise als Maß für die Ionisation. Zur Kompensation unerwünschter Strahlungseinflüsse diente die ebenfalls von Grosskurth beschriebene feinregulierbare Uranoxydkammer. Die Anordnung war in der von Küstner<sup>1)</sup> angegebenen Weise als Doppelmonochromator ausgebildet. Alle Ionisationen wurden auf denselben Fadenablauf des Elektrometers an der Vergleichsionisationskammer bezogen. Durch

Ta-  
Element:

belle 2

alle anderen Absorbenten wurden als Verbindungen untersucht

In	Mn <sub>el</sub>	Fe	Fe <sub>el</sub>	Co	Zn <sub>el</sub>	As	Se	Br	Sr	Zr	Mo	Sb	Sb <sub>el</sub>	Te	Te <sub>el</sub>	J	Ce
3576	0,307	0,324	0,3888	0,4203	—	0,7364	0,7519	0,8295	0,9834	1,2166	1,4170	2,2337	2,1907	2,4214	2,4350	2,5603	3,4465
3954	—	0,409	—	—	—	0,8569	0,8773	0,9501	1,1245	1,3736	1,5881	2,4772	—	2,7246	—	—	3,8192
5890	0,368	0,698	0,5542	0,6804	1,0146	1,3242	1,3707	1,5091	1,8394	2,1896	2,5253	4,0233	4,0366	4,2766	4,3278	4,6504	6,1446
6230	0,604	0,6734	0,6853	0,7322	1,0692	1,4317	1,4964	1,6068	1,9597	2,4037	2,7106	4,2853	4,3119	4,6544	4,7267	4,9546	6,5100
6693	0,650	0,7190	—	0,7842	1,1485	1,5172	1,5811	1,7072	2,0520	2,5392	2,8800	4,4543	4,5153	4,9720	4,9636	5,2467	6,8703
7092	0,720	0,7694	0,7674	0,8443	1,2261	1,6240	1,7096	1,8494	2,2026	2,7353	3,1192	4,9236	4,9112	5,3657	5,3952	5,6646	7,4746
7718	0,780	0,8140	—	0,9084	1,2972	1,7615	1,8298	1,9794	2,3539	2,9325	3,2781	5,3968	5,2923	5,7573	5,9462	6,1042	8,9645
8327	0,836	0,8511	0,8644	0,9734	1,4082	1,8857	1,9465	2,1379	2,5176	3,1186	3,5757	5,6216	5,7153	6,2521	6,2734	6,6313	8,6044
9033	0,920	1,0769	1,0863	1,1664	1,6556	2,2685	2,4639	2,6517	3,0359	3,6912	4,2780	6,7361	6,8776	7,5099	7,5114	7,7610	10,114
1001	1,120	1,1815	1,1946	1,3086	1,8868	2,5703	2,6502	2,9650	3,4960	4,1767	4,8034	7,5757	7,6882	8,3498	8,3815	8,7408	11,260
1071	1,200	1,2565	1,2496	1,4115	2,0360	2,7467	2,7576	3,2130	3,7792	4,5034	5,1581	8,1639	—	8,9906	8,9659	9,2346	12,050
3,0150	2,962	4,0012	3,9824	3,5428	5,4383	7,0140	7,2472	8,0065	9,5493	11,328	13,126	—	—	—	—	—	—
3,6076	3,002	4,1120	4,1907	4,4149	6,4118	8,1733	8,5965	9,7003	11,265	13,579	15,781	—	—	—	—	—	—
3,9660	4,113	4,6299	—	4,9070	7,1984	9,1736	9,3783	10,802	12,544	14,962	17,659	—	—	—	—	—	—
4,2636	4,270	5,1367	—	5,3959	7,8066	9,9727	10,389	11,864	13,564	16,107	19,154	—	—	—	—	—	—
4,6723	—	5,6846	5,6739	—	8,3659	10,813	11,209	12,772	14,626	17,366	20,560	—	—	—	—	—	—
5,1922	—	5,2427	—	6,8842	9,4484	11,824	11,822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5,6807	—	5,9127	—	7,6821	10,357	13,056	13,510	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7,4097	—	8,4010	8,5502	9,7703	13,080	16,429	16,729	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8,4147	—	8,5774	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9,4692	—	10,717	—	12,347	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10,276	—	12,001	—	13,764	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11,576	—	13,700	—	15,394	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13,530	—	15,561	—	17,253	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14,751	—	17,527	—	20,401	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	19,984	—	23,188	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	22,941	—	26,920	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	31,918	—	33,710	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	38,884	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ständiges Nachregulieren eines zwischen Umformer und Transformator liegenden Spindelwiderstandes wurden die Störungen der Netzschwankungen weitgehend unschädlich gemacht.

## VI. Die Meßergebnisse

### 1. Der Massenschwächungskoeffizient als Funktion der Wellenlänge

Da es bei der vorliegenden Untersuchung darauf ankam, den Verlauf der einzelnen Schwächungskurve so genau wie möglich festzulegen, wurden die Messungen bei allen Wellenlängen ausgeführt, für die Strahler zur Verfügung standen. Die für die verschiedenen

Elemente und Wellenlängen erhaltenen Massenschwächungskoeffizienten  $\mu/\rho$  sind in Tab. 2 zusammengestellt. In Abb. 1 ist  $\log \mu/\rho$  als Funktion von  $\log \lambda$  aufgetragen. Augenfällig ist zunächst der stark gekrümmte Verlauf der logarithmischen Schwächungskurven für leichtatomige Elemente. Er wird bekanntlich dadurch bedingt, daß bei leichtatomigen Absorbenten die Streuung der Photoabsorption gegenüber stärker ins Gewicht fällt. Je schweratomiger aber ein Element ist, desto mehr nähern sich die Schwächungskurven Geraden, weil hier die Streuung gegen die Absorption mehr und mehr zurücktritt, so daß das Gesetz für die Photoabsorption

$$(3) \quad \frac{\mu}{\rho} = C \cdot \lambda^n$$

so gut wie ganz erfüllt ist. Für leichte Elemente haben Küstner und Trübstein<sup>10)</sup> die Analyse der Schwächungskurven in Photoabsorption und Comptonstreuung entwickelt. Ihr Verfahren wurde auch hier zur Anwendung gebracht. Von besonderem Interesse ist die Analyse der Schwächungskurve für Kohlenstoff, da dieser einen Bestandteil vieler vom Verf. untersuchten Verbindungen darstellt. Obgleich dieselben Präparate benutzt wurden, die auch Grosskurth verwandte, liegen dessen  $\mu/\rho$ -Werte fast durchweg um den Betrag 0,03 niedriger als die des Verf. Dieser geringe Unterschied ist nicht verwunderlich, da die Meßgenauigkeit durch Steigerung der Intensität bedeutend erhöht wurde. Küstner und Trübstein<sup>10)</sup> haben aus Untersuchungen an Wasser und Triolein ( $C_{57}H_{104}O_6$ ) für Kohlenstoff die Schwächungsformel abgeleitet:

$$(4) \quad \frac{\mu}{\rho} = 1,0342 \lambda^{3,205} + 0,200 f(\lambda),$$

wobei

$$(5) \quad f(\lambda) = \frac{1}{1 + 0,048 \lambda}$$

das bekannte Verhältnis der Comptonstreuung  $\sigma_C$  zur klassischen  $\sigma_0$  ist. Berechnet man nach dieser Formel das  $\mu/\rho$  für Kohlenstoff, so zeigen sich von den Ergebnissen des Verfs. im allgemeinen nur Abweichungen, die kleiner als 1% sind. Mit wachsenden Wellenlängen werden aber die  $\mu/\rho$ -Werte dieser Untersuchung in zunehmendem Maße bis zu 5% größer als die von Küstner und Trübstein angegebenen. Da — worauf bereits Grosskurth hinwies — schon geringste Verunreinigungen der Kohle durch ein schweratomigeres Element das Meßergebnis wesentlich beeinflussen, so dürfte der Unterschied in den Ergebnissen auf solche Verunreinigungen der

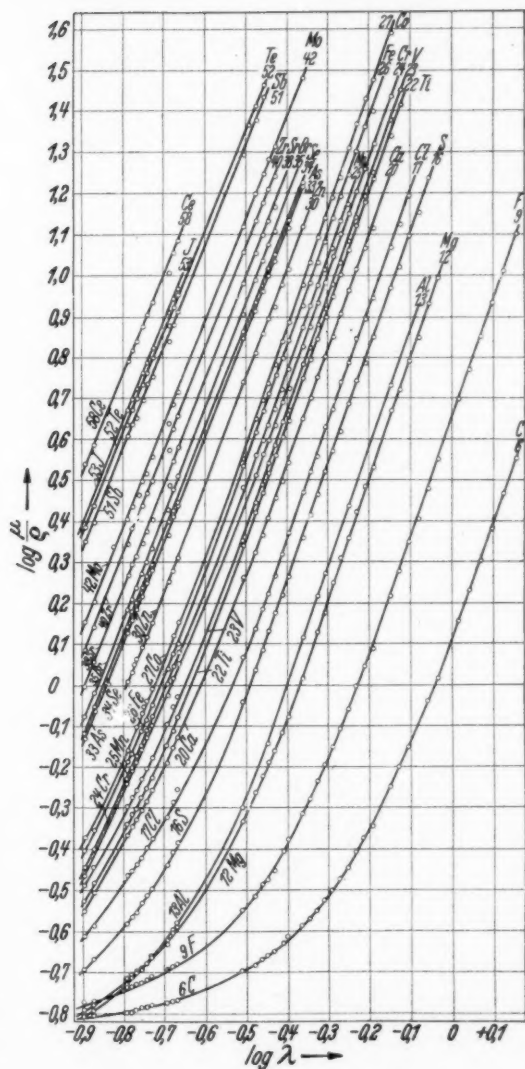


Abb. 1.  $\log \frac{\mu}{e}$  als Funktion von  $\log \lambda$

von Grosskurth und dem Verf. benutzten natürlichen Kohle zurückzuführen sein, die ja nach der chemischen Analyse, wie Grosskurth<sup>2)</sup> mitteilt, 0,03 %  $\text{SiO}_2$  und 0,01 % Fe enthält. Berücksichtigt man diese bekannten Verunreinigungen, so liefert die Analyse der Kohlekurve des Verfs.:

$$(6) \quad \frac{\mu}{\rho} = 1,088 \lambda^{3,1818} + 0,203 f(\lambda).$$

Aus den dargelegten Gründen wurde in der vorliegenden Arbeit für die Berechnung der  $\mu/\rho$ -Werte für die Elemente aus den Verbindungen die Küstner-Trübsteinsche Formel (4) angewandt. Die Unterschiede zwischen beiden Formeln sind indessen so geringfügig, daß sie für die Reduktion auf den elementaren Massenschwächungskoeffizienten kaum von Bedeutung sind. Für die Berücksichtigung der übrigen leichtatomigen Komponenten in den Verbindungen wurde die von Küstner und Trübstein gegebene Formel:

$$(7) \quad \frac{\tau}{\rho} = 0,00210 \cdot Z^{3,46} \lambda^{3,205}$$

benutzt. Hiermit ergaben sich unter Umrechnung mit Hilfe der bekannten Mischungsformel entsprechend der Gleichung

$$(8) \quad \frac{\mu}{\rho} = \frac{\tau}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho} = C \lambda^n + \frac{\sigma_0}{\rho} f(\lambda),$$

die in Tab. 3 zusammengestellten Werte für die Konstanten  $C$ ,  $n$  und  $\sigma_0/\rho$  für die einzelnen Elemente. Sie gelten in jedem Falle für den Ast auf der kurzwelligen Seite der  $K$ -Kante.

Tabelle 3  
Die ermittelten Konstanten  $C$ ,  $n$  und  $\sigma_0/\rho$

Element	$C$	$n$	$\sigma_0/\rho$	Element	$C$	$n$	$\sigma_0/\rho$
C 6	—	—	—	Co 27	105,93	2,895	0,1828
F 9	4,2628	3,2030	0,2172	Zn 30	123,94	2,702	0,1248
Mg 12	12,299	3,110	0,1895	As 33	136,00	2,585	—
Al 13	14,44	3,009	0,1661	Se 34	141,33	2,469	—
S 16	24,728	2,908	0,1807	Br 35	174,83	2,613	—
Cl 17	31,581	2,9282	0,2299	Sr 38	190,49	2,563	—
Ca 20	45,24	2,821	0,2047	Zr 40	220,33	2,5381	—
Ti 22	59,49	2,890	0,1883	Mo 42	257,23	2,5481	—
V 23	65,30	2,912	0,2165	Sb 51	379,97	2,5106	—
Cr 24	73,40	2,894	0,2346	Te 52	410,65	2,5081	—
Mn 25	79,27	2,891	0,2196	I 53	423,92	2,2861	—
Fe 26	90,19	2,841	0,1650	Ce 58	545,55	2,4759	—

Die Werte für  $C$  nehmen in bekannter Weise mit der Atomnummer zu. Für den Exponenten  $n$  von  $\lambda$  ergibt sich demgegenüber eine Abnahme mit der Atomnummer, die sich auch in den ver-

schiedenen Neigungen der Schwächungskurven in der Abb. 1 zu erkennen gibt, soweit diese geradlinig verlaufen.

Für den klassischen Streukoeffizienten  $\sigma_0/\rho$  findet man bei den Elementen C(6) bis Mn(25) Werte, die um 0,2 streuen; für schweratomigere Elemente nehmen die Werte für  $\sigma_0/\rho$  merklich ab und sind von Se(34) ab so klein, daß sie aus der Krümmung der Kurve nicht mehr ermittelt werden können. Man könnte hier einwenden, daß die Küstner-Trübesteinsche Methode der Analyse nur für leichtatomische Elemente gültig ist, bei denen fast reine Comptonstreuung besteht, daß mit zunehmendem Atomgewicht aber die wellenlängenunabhängige klassische Streuung mehr und mehr neben der Comptonstreuung in Erscheinung tritt, daß die Küstner-Trübesteinsche Analyse die klassische Streukomponente nicht berücksichtigt und deshalb für schweratomige Elemente nicht anwendbar ist. Nun hat aber schon Grosskurth gezeigt, daß, falls merkliche klassische Streuung vorhanden wäre, geradlinige Schwächungskurven eines schweratomigen Elementes, wie sie Abb. 1 zeigt, in Photoabsorptionskurven übergehen würden, die mit abnehmender Wellenlänge abfallen und von unten konkav sein würden, so daß das Gesetz (3) nicht erfüllt wäre. Auch für die vorliegenden Meßergebnisse würde dieses gelten, so daß möglicherweise mit steigender Atomnummer in der Tat der Streukoeffizient immer kleiner wird. Hierfür spräche ja im übrigen auch der oben erwähnte Umstand, daß bei den Schwerelementen die Streuung nicht mehr mit Sicherheit nachweisbar ist.

In diesem Zusammenhang sei noch auf einen interessanten Tatbestand hingewiesen. Wie aus Abb. 1 hervorgeht, schneidet im dargestellten Wellenlängenbereich die Schwächungskurve für Aluminium (13) die für Magnesium (12), beide schneiden die für Fluor (9) und außerhalb des untersuchten Bereiches offenbar auch die für Kohle (6). Wie oben dargelegt wurde, verlaufen in doppelt-logarithmischer Darstellung die Photoabsorptionskurven geradlinig und um so weniger geneigt, je schweratomiger das Element ist. Eine Schar von Photoabsorptionskurven würde also in der Darstellung der Abb. 1 eine Geradenschar liefern, die nach unten links auseinander laufen. Wenn trotzdem bei den Schwächungskurven durch Überlagerung der Streuung über die Photoabsorption eine Überschneidung der Kurven für Nachbar-elemente auftritt, so läßt sich dieses Emporsteigen der Kurve des leichtatomigeren Elementes über die des schweratomigeren nur dadurch erklären, daß der Streukoeffizient des schweratomigeren Elementes mit abnehmender Wellenlänge kleiner wird als der des leichtatomigeren.



## 2. Der Massenschwächungskoeffizient als Funktion der Atomnummer

Für eine gegebene Wellenlänge ist von verschiedenen Autoren der Schwächungskoeffizient  $\mu_a$  pro Atom als Funktion der Atomnummer dargestellt worden<sup>11)</sup>. Trägt man  $\log \mu_a$  gegen  $\log Z$  auf, so wird fast immer eine lineare Abhängigkeit gefunden.  $\log \frac{\mu}{\rho}$  gegen  $\log Z$  hat wohl nur Wingardh<sup>12)</sup> dargestellt. Für die Wellenlängen  $\lambda = 0,709 \text{ \AA}$  findet er von Kohlenstoff (6) bis Yttrium (39) und für  $\lambda = 0,586 \text{ \AA}$  von Sauerstoff bis Molybdän (42) ebenfalls eine lineare Beziehung. Dies gilt auch für  $\lambda = 0,254 \text{ \AA}$  im Bereiche von Aluminium (13) bis Silber (47). Für kürzere Wellenlängen hingegen sind die Kurven nur oberhalb der Atomnummer 20 geradlinig. Für niedrigere Atomnummern biegt die Kurve um so stärker nach oben herum, je kürzer die Wellenlänge ist.

Aus den vorliegenden Messungen des Verfs. wurde ebenfalls  $\log \frac{\mu}{\rho}$  gegen  $\log Z$  für die Wellenlängen 0,15, 0,20, 0,30, 0,40, 0,50, 0,60, 0,70 und 0,80  $\text{\AA}$  in Abb. 2 aufgetragen. Dabei wurden die Werte für  $\log \frac{\mu}{\rho}$  der graphischen Darstellung der Abb. 1 in sehr großem Maßstabe entnommen. Bei dem bedeutend reichhaltigeren Material kommt hier die Linearität bei langen Wellenlängen und die zunehmende Krümmung mit abnehmenden Wellenlängen noch viel deutlicher zum Ausdruck als bei Wingardh. Die einzelnen Punkte fügen sich in Abb. 2 indessen den Kurven mit etwas geringerer Genauigkeit an als in Abb. 1. Im allgemeinen zeigt sich aber, daß sich für irgendein bestimmtes Element der Meßpunkt entweder bei allen Wellenlängen den zugehörigen Kurven einfügt, oder daß er durchweg eine Abweichung in demselben Sinne aufweist. Hier tritt wieder deutlich der große Einfluß von Mängeln des absorbierenden Materials zutage. Es soll indessen betont werden, daß für den punktierten Teil der Kurven noch keine volle Gewähr übernommen werden kann. Insbesondere liegen in diesem Bereiche die Punkte für Magnesium (12) und Aluminium (13) zu niedrig, was zwangsläufig seine Erklärung in den oben besprochenen Überschneidungen der Kurven im kurzwelligen Gebiet der Abb. 1 findet. Auf eine formelmäßige Darstellung der Kurven aus Abb. 2 wurde vorläufig verzichtet.

In diesem Zusammenhange ist die Frage von Interesse, ob bei Untersuchung einer Verbindung dasselbe Ergebnis erhalten wird, wenn man die leichtatomigen Komponenten entsprechend der bekannten Mischungsformel eliminiert, wie die Untersuchung des Elementes

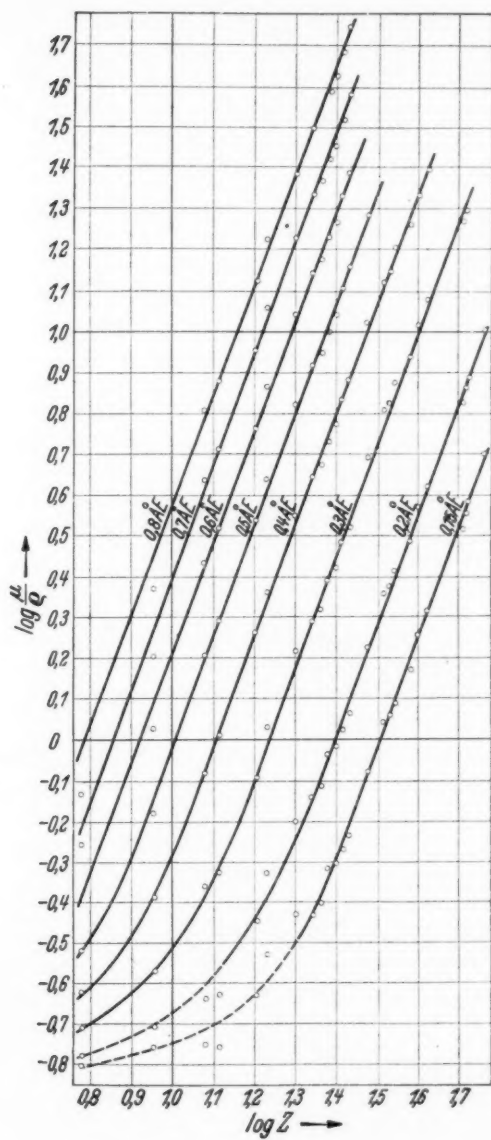


Abb. 2.  $\log \frac{\mu}{q}$  als Funktion von  $\log Z$

selbst. Diese Frage wurde in 4 Fällen geprüft; die Ergebnisse sind in der Tab. 4 zusammengefaßt.

Tabelle 4

Verbindung Element	MnO <sub>2</sub> Mn	Fe(CO <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> + 2H <sub>2</sub> O Fe	Sb <sub>2</sub> O <sub>3</sub> Sb	K <sub>2</sub> TeO <sub>5</sub> Te
Leichtatomige Gewichtsprozent	36,8	68,4	16,6	49,7
Absorptionsanteil der leichtatomigen Komponenten	1,7 bis 15,3	2,0 bis 26,0%	etwa 0,6%	etwa 3,0%
$\Delta \mu/q$ %	+ 1,4	+ 0,5	- 0,1	+ 0,3

In der ersten Zeile ist die Verbindung, in der zweiten das Element angeführt, auf das es ankommt. Die letzte Zeile gibt an, um wieviel Prozent im Durchschnitt das  $\mu/q$  bei Untersuchung der Verbindung größer ausfiel als bei Untersuchung des Elementes. Bei Eisen, Antimon und Tellur ist der Fehler nicht größer als 0,5%, während er bei Mangan + 1,4% erreicht. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die leichtatomigen Komponenten, deren Gewichtsprozent in der Zeile 3 angeführt sind, bei Antimon und Tellur nur einen geringen Anteil an der Gesamtabsorption (Zeile 4) bewirken, während der Absorptionsanteil bei Mangan und Eisen je nach der Wellenlänge beträchtliche Werte annimmt. Während also bei schweratomigen Elementen wie Antimon und Tellur die Korrektur auf das Element nach der Mischungsformel nur klein und daher von geringem Einfluß auf das Ergebnis ist, wirkt sie sich bei leichtatomigeren Elementen wie Mangan und Eisen in erhöhtem Maße aus, und zwar um so mehr, je kürzer die Wellenlänge ist.

#### Zusammenfassung

1. Es wurden die Massenschwächungskoeffizienten von 24 Elementen oder leichtatomiger Verbindungen derselben mit Hilfe monochromatischer Röntgenstrahlen nach dem Filterdifferenzverfahren nach Küstner im Wellenlängenbereiche von 0,1279 — 1,433 Å untersucht.

2. Trägt man  $\log \frac{\mu}{\rho}$  gegen  $\log \lambda$  auf, so erhält man für die schweren Elemente Gerade, mit abnehmender Atomnummer indessen Kurven zunehmender Krümmung.

3. Die Konstanten des Schwächungsgesetzes wurden bei den leichtatomigen Elementen mit Hilfe der Analyse nach Küstner

und Trübestein, bei den schweratomigen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Dabei ergab sich, daß in dem  $C \cdot \lambda^n$ -Gesetze das  $C$  mit steigender Atomnummer wächst, das  $n$  aber abnimmt. Der klassische Massenstreuoeffizient  $\sigma_0/\rho$  hat bei leichtatomigen Elementen etwa den Wert 0,2 und nimmt möglicherweise mit wachsender Atomnummer ab.

Herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. Küstner für die Anregung zu dieser Arbeit und deren unermüdliche Förderung sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die die Stabilvoltanlage, die Ventilröhren, die Röntgenröhre und die Dämpfungswaage gütigst zur Verfügung stellte.

#### Literatur

- 1) H. Küstner, Ztschr. f. Phys. **70**. S. 324. 1931.
- 2) K. Grosskurth, Ann. d. Phys. [5] **20**. S. 197. 1934.
- 3) K. Schulz, Ann. d. Phys. [5] **27**. S. 1. 1936.
- 4) H. H. Biermann, Ann. d. Phys. [5] **26**. S. 740. 1936.
- 5) I. Müller, Ann. d. Phys. [5] **32**. S. 625. 1938.
- 6) H. Hansen, Ann. d. Phys. [5] **35**. S. 524. 1939.
- 7) H. Küstner, Phys. Ztschr. **33**. S. 46. 1932.
- 8) H. Rindfleisch, Ann. d. Phys. [5] **28**. S. 409. 1937.
- 9) H. Küstner, Ztschr. f. Phys. **77**. S. 52. 1932.
- 10) H. Küstner u. H. Trübestein, Ann. d. Phys. [5] **28**. S. 385. 1937.
- 11) E. Dershem u. M. Schein, Ztschr. f. Phys. **75**. S. 395—414. 1932;  
T. M. Hahn, Phys. Rev. **46**. S. 149—153. 1934; M. Jones, Phys. Rev. **50**.  
S. 110—114. 1936; H. Kurtz, Ann. d. Phys. **85**. S. 529—551. 1928.
- 12) A. K. Wingårdh, Ztschr. f. Phys. **8**. S. 363—376. 1922.

Göttingen.

(Eingegangen 27. September 1939)

## Über inhomogene ebene Wellen

Von T. Westerdijk

(Mit 15 Abbildungen)

Inhalt: Einleitung. — 1. Inhomogene Wellen. — 2. Imaginäre Wellen. — 3. Komplexe Wellen. — 4. Poyntingscher Vektor. — 5. Der Zusammenhang zwischen Poyntingschem Vektor und Lichtstrahl. — 6. Die Energiebilanz. — 7. Die optischen Größen  $n$  und  $k$ . — 8. Das komplexe Brechungsgesetz. — 9. Komplexe Brechung in durchsichtigen Medien (bei totaler Reflexion). — Zusammenfassung.

### Einleitung

Die Ableitung der Gesetze der Lichtfortpflanzung und Lichtbrechung in absorbierenden Medien aus der elektromagnetischen Lichttheorie kam bisher in der Hauptsache nur in Betracht, wenn die Eigenschaften der Metallreflexion erklärt werden sollten. Als Hauptursache der wesentlichen Unterschiede zwischen diesen Gesetzen und denen für durchsichtige Medien wird dabei die Inhomogenität der im absorbierenden Medium gebrochenen Wellen gefunden. Die hierbei entwickelten Formeln zeigen jedoch, daß die Unterschiede nur bedeutend sind, wenn der Absorptionsindex des Mediums sehr wenig von der Einheit abweicht, was bei Metallen im allgemeinen der Fall ist.

Bei der Bestimmung der Brechungsindizes stark absorbierender Flüssigkeiten stießen wir nun auf Schwierigkeiten, für die wir zuerst keine Erklärung finden konnten. Diese erhielten wir schließlich von Dr. Littmann, Jena, der uns darauf hinwies, daß auch bei unseren dunklen Flüssigkeiten, deren Absorptionsindizes eine Größenordnung von  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  hatten, die Abweichungen vollständig aus den Reflexionsformeln für absorbierende Medien erklärt werden könnten. Näheres hierüber ist in Abschnitt 8 angegeben. Wir erwähnen diese Tatsache hier, um die Ableitungen in den folgenden Abschnitten zu motivieren. Wie bereits erwähnt, beschäftigt man sich in der Theorie der Metalloptik nur soweit mit den Erscheinungen im absorbierenden Medium, als für die Analyse der Reflexionserscheinungen erforderlich ist. Es hat hierbei wenig Sinn, das ins zweite Medium durchdringende Licht weiter zu betrachten,

da es nach einigen Wellenlängen praktisch vollkommen absorbiert ist. Dies ist nun bei stark absorbierenden Flüssigkeiten nicht der Fall, und so entstand das Bedürfnis, die Erscheinungen in diesen Flüssigkeiten weiter zu untersuchen, als in der Originalliteratur (Ketteler, Drude, Voigt, Pfeiffer u. a.) und in den Handbüchern geschehen ist, und zwar in bezug auf den Energiestrom und dessen Beeinflussung durch Inhomogenität, Absorption und Schwingungsrichtung. Hierbei wurde eine Reihe neuer Ergebnisse erhalten, die unseres Erachtens von genügend allgemeinem Interesse sind, um eine Veröffentlichung zu rechtfertigen.

Für die verschiedenen physikalischen Größen sind möglichst dieselben Symbole verwendet worden, die W. König in seiner ausgezeichneten Übersicht im Handbuch der Physik, Bd. XX (S. 183 bis 253), gebraucht. Im Text ist an mehreren Stellen, wo es nötig erschien, die Ergebnisse mit denen der bestehenden Literatur zu vergleichen, auf diese Abhandlung von W. König hingewiesen worden. Da das Handbuch der Physik ein genaues Schrifttumsverzeichnis enthält, ist hier von weiteren Literaturangaben abgesehen worden.

### 1. Inhomogene Wellen

Es ist bekannt, daß die Gesetze der geometrischen Optik für isotrope Medien, nämlich

a) die geradlinige Fortpflanzung des Lichts mit einer nur vom Medium abhängigen Geschwindigkeit,

b) die Snelliusschen Gesetze für die Spiegelung und Brechung der Lichtstrahlen,

direkt aus der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitet werden können, wenn man die Lichtstrahlen mit dem Poyntingschen Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \text{ identifiziert.}$$

Bei dieser Ableitung geht man dann von den Maxwell'schen Gleichungen für einen isotropen Isolator aus:

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

$$(2) \quad \epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \quad \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

und von den sich daraus ergebenden Schwingungsgleichungen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathfrak{E}, \\ \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathfrak{H}. \end{array} \right.$$

Bei einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems ist die einfachste Lösung von (3):

$$\mathfrak{E}_x = f(p t - q z + \delta), \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = 0.$$

Dies ist eine elektrische Störung, die sich mit einer Geschwindigkeit von  $c' = \frac{p}{q}$  in der Z-Richtung fortpflanzt.

Die Schwingungsgleichung ergibt hierfür:

$$\varepsilon \mu p^2 = c^2 q^2 \quad \text{oder} \quad \frac{p^2}{q^2} = c'^2 = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}.$$

Wir erhalten hieraus für den Brechungsindex des Mediums

$$n^2 = \frac{c^2}{c'^2} = \varepsilon \mu.$$

Zu dieser elektrischen Störung gehört dann nach (2) die magnetische

$$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = \frac{n}{\mu} f(p t - q z + \delta), \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Da der Zustand in allen Punkten einer Ebene  $Z = \text{const}$  der gleiche ist, so stellen diese Gleichungen eine ebene Welle dar, die in der Richtung der Wellennormale mit der gefundenen Geschwindigkeit  $c'$  fortschreitet. Die elektrischen und magnetischen Kräfte liegen dabei senkrecht zueinander in der Wellenebene.

Wir können bei den streng periodischen Lichterscheinungen die allgemeine Funktion  $f$  durch eine harmonische ersetzen:

$$\mathfrak{E}_x = A_0 \sin(p t - q z + \delta), \quad \mathfrak{H}_y = \frac{n}{\mu} A_0 \sin(p t - q z + \delta).$$

Hierin ist also

$$p = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{und} \quad q = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Der Einfachheit halber gebrauchen wir hierfür die nachstehende symbolische Darstellung:

$$\mathfrak{E}_x = A_0 e^{i(p t - q z + \delta)}, \quad \mathfrak{H}_y = \frac{n}{\mu} A_0 e^{i(p t - q z + \delta)}.$$

Der mit dieser Strahlung verbundene Energietransport wird durch den Poyntingschen Vektor  $\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$  dargestellt. Dieser steht senkrecht zur Wellenebene, hat also dieselbe Richtung wie die Lichtstrahlen der geometrischen Optik; seine mittlere Größe entspricht der Intensität:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathfrak{S}_x dt = \frac{c}{8\pi} \frac{n}{\mu} A_0^2.$$



Dieses bekannte Bild ändert sich vollkommen, wenn man nicht von einer Wellenebene ausgeht, bei der die elektrische Schwingung in allen Punkten gleich stark ist (homogene Welle), sondern eine Lösung für die Gleichungen sucht, bei denen die Amplitude  $A$  eine Veränderliche ist (inhomogene Wellen).

Wir gehen also aus von der elektrischen Schwingung

$$\mathfrak{E}_x = A(x, y) e^{i(p t - q z)},$$

$$\mathfrak{E}_y = 0.$$

Die Gl. (1)

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0,$$

ergibt dann:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = - \frac{\partial A}{\partial x} e^{i(p t - q z)}$$

oder

$$\mathfrak{E}_z = - \frac{i}{q} \frac{\partial A}{\partial x} e^{i(p t - q z)} = \frac{i}{q} \frac{\partial A}{\partial x} e^{i(p t - q z - \frac{\pi}{2})}.$$

Die elektrische Schwingung muß also eine Komponente in der Fortpflanzungsrichtung haben, die in der Phase um  $90^\circ$  zurück liegt. Diese wird wohl longitudinale Schwingung genannt, aber weder sie noch die transversale Schwingung  $\mathfrak{E}_x$  kann für sich bestehen. Es ist daher richtiger zu sagen, daß nur eine elliptische elektrische Schwingung möglich ist.

Substituiert man diese in der Schwingungsgleichung (3), so erhält man

$$- \varepsilon \mu p^2 A = c^2 \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - q^2 A \right)$$

oder

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} p^2 = q^2 - \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) : A.$$

Das letzte Glied drückt also den Einfluß der Inhomogenität der Welle aus. Wir nennen diesen  $b^2$ . Die Gleichung lautet dann

$$(4) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} p^2 = q^2 - b^2.$$

Nun ist jedoch  $c' = \frac{p}{q} = \frac{\lambda}{\tau}$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und  $n = \frac{c}{c'}$ . Dies ergibt die Formel:

$$(4a) \quad \varepsilon \mu = n^2 \left( 1 - b^2 \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right).$$

Bei einer homogenen Welle ( $b = 0$ ) geht dies über in die Maxwell'sche Beziehung  $n^2 = \varepsilon \mu$ , aber bei Werten für  $b$ , bei denen  $b^2 \lambda^2$

nicht mehr gegen eins vernachlässigt werden darf, folgt hieraus ein anderer Wert für  $n$  und dementsprechend auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Da sich  $b$  im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändert, tut es die Geschwindigkeit auch, mit anderen Worten, eine ursprünglich ebene, inhomogene Wellenoberfläche kann nicht unverändert fortschreiten, sondern wird verformt; dabei werden die Lichtstrahlen, die orthogonalen Trajektorien zu diesen Oberflächen, krummlinig. Nur wenn die Inhomogenität  $b^2$  konstant ist, so daß die Amplitude  $A$  der Differentialgleichung

$$\left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) : A = \text{const}$$

entspricht, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in jedem Punkt der Wellenoberfläche gleich und sind gerade Lichtstrahlen möglich.

Diese Geschwindigkeit ist jedoch nicht mehr ausschließlich von den Eigenschaften des Mediums ( $\varepsilon \mu$ ) abhängig, sondern auch von der Inhomogenität  $b^2$  der Welle, und zwar folgt aus (4)

$$(4b) \quad c' = \frac{p}{q} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu + \frac{b^2 c^2}{p^2}}}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird bei zunehmender Inhomogenität stets kleiner und kann sich schließlich 0 nähern.

Beim Brechungsindex verhält sich dies umgekehrt.

(Auch die Beugungserscheinungen, die dort auftreten, wo ein übrigens homogenes Lichtbündel begrenzt wird, können auf diese Weise erklärt werden. Denn am Rand sind die zweiten Ableitungen sehr groß (negativ) und ergeben folglich eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit und damit eine Verformung der Wellenebene.)

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns nur mit inhomogenen Wellen, die der Differentialgleichung genügen, und zwar mit solchen, bei denen sich die Amplitude in einer willkürlichen Richtung  $l$  in der Wellenebene exponentiell ändert. Also

$$A(xy) = A_0 e^{b l} = A_0 e^{b x \cos \gamma + b y \sin \gamma},$$

wenn  $\gamma$  den Winkel zwischen der positiven  $l$ - und  $X$ -Richtung darstellt. Wir erhalten dann tatsächlich folgendes Resultat:

$$\left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) : A = b^2.$$

(Diese sehr einfache Lösung der Differentialgleichung wurde gewählt, weil bei der Brechung eines homogenen Lichtbündels in einem absorbierenden Medium ausschließlich dieser Typ angetroffen wird.)

Die elektrische Schwingung wird also dargestellt durch

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = A_0 e^{b(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} e^{i(pt - qz)}, \\ \mathfrak{E}_y = 0, \\ \mathfrak{E}_z = -i \frac{b \cos \gamma}{q} A_0 e^{b(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} e^{i(pt - qz)}. \end{cases}$$

Hierzu gehört nach der Grundgleichung

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

die folgende magnetische Schwingung:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \frac{n}{\mu} \frac{b^2 \sin \gamma \cos \gamma}{q^2} A_0 e^{b(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} e^{i(pt - qz)}, \\ \mathfrak{H}_y = \frac{n}{\mu} \frac{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}{q^2} A_0 e^{b(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} e^{i(pt - qz)}, \\ \mathfrak{H}_z = -i \frac{n}{\mu} \frac{b \sin \gamma}{q} A_0 e^{b(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} e^{i(pt - qz)}. \end{cases}$$

Die X- und Y-Komponenten der magnetischen Kraft sind mit  $\mathfrak{E}_x$  in Phase, die Z-Komponente liegt dagegen wie  $\mathfrak{E}_z$  um  $90^\circ$  zurück. Die magnetische Schwingung ist also ebenfalls elliptisch. Der magnetische Vektor bleibt hierbei stets in einer Ebene, welche durch die Z-Achse geht. Den Winkel  $V$  zwischen dieser Ebene und der ZO X-Ebene, in dem sich der elektrische Vektor bewegt, kann man wie folgt berechnen:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\mathfrak{H}_y}{\mathfrak{H}_x} = \frac{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}{b^2 \sin \gamma \cos \gamma},$$

dies ergibt an Hand von (4):

$$\operatorname{tg} V = \frac{s\mu p^2 + c^2 b^2 \sin^2 \gamma}{c^2 b^2 \sin \gamma \cos \gamma}.$$

Hieraus folgt, daß bei  $b = 0$   $V = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\text{bei } b = \infty \quad V = \gamma.$$

Bei zunehmender Inhomogenität dreht sich die magnetische Schwingungsebene um die Z-Achse, jedoch niemals weiter als bis der Gradient von  $A$  darin liegt.

Fällt der Gradient mit der Y-Achse zusammen ( $\cos \gamma = 0$ ), so liegt die magnetische Schwingung stets in der ZO Y-Ebene, unabhängig von der Inhomogenität. Aber dann ist auch stets  $\mathfrak{H}_x = 0$  und  $\mathfrak{E}_z = 0$ . In diesem besonderen Fall ist die elektrische Schwingung linear und nur die magnetische elliptisch, in einer Ebene senkrecht zu  $\mathfrak{E}$ .

Fällt der Gradient mit der  $X$ -Achse zusammen ( $\sin \gamma = 0$ ), so sind  $\mathfrak{H}_x$  und  $\mathfrak{H}_z = 0$ , d. h. der magnetische Vektor ist linear ( $Y$ -Achse), und der elektrische Vektor beschreibt eine Ellipse in der  $XOZ$ -Ebene.

Wenn wir nun den Poyntingschen Vektor für den allgemeinen Fall ableiten wollen, so müssen wir einen Augenblick die symbolische Schreibweise verlassen und wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= A_0 \sin pt, & \mathfrak{H}_x &= \frac{n}{\mu} \frac{b^2 \sin \gamma \cos \gamma}{q^2} A_0 \sin pt, \\ \mathfrak{E}_y &= 0, & \mathfrak{H}_y &= \frac{n}{\mu} \frac{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}{q^2} A_0 \sin pt, \\ \mathfrak{E}_z &= -A \frac{b \cos \gamma}{q} \cos pt, & \mathfrak{H}_z &= -\frac{n}{\mu} \frac{b \sin \gamma}{q} A_0 \cos pt.\end{aligned}$$

Hiermit können wir dann berechnen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y) = \frac{c}{4\pi} \frac{n}{\mu} \frac{b \cos \gamma}{q} \frac{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}{q^2} A_0^2 \sin pt \cos pt, \\ \mathfrak{S}_y &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z) = \frac{c}{4\pi} \frac{n}{\mu} \frac{b \sin \gamma}{q} \frac{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}{q^2} A_0^2 \sin pt \cos pt, \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x) = \frac{c}{4\pi} \frac{n}{\mu} \frac{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}{q^2} A_0^2 \sin^2 pt. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen ersehen wir, daß der Poyntingsche Vektor sich in der Ebene bewegt, die durch den Gradienten von  $A$  und die Normale auf der Wellenoberfläche (die  $Z$ -Achse) bestimmt ist. Stellen wir die  $X$ - und  $Y$ -Komponenten zu einer  $G$ -Komponente zusammen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(7a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_y &= \frac{b}{q} B \sin 2pt, \\ \mathfrak{S}_x &= B - B \cos 2pt, \end{aligned} \right. \quad \text{worin} \quad B = \frac{c}{8\pi} \frac{n}{\mu} \left( 1 - \frac{b^2 \cos^2 \gamma}{q^2} \right) A_0^2.$$

Dies ist eine Ellipse durch  $O$ , mit der  $Z$ -Achse als lange Achse. Die Spitze des Poyntingschen Vektors beschreibt also eine Ellipse mit doppelter Winkelgeschwindigkeit. Der Abstand des Mittelpunktes  $M$  beträgt  $\overline{OM} = B$ . Das Verhältnis der Achsen ist  $b/q$ .

Bei diesen inhomogenen Wellen liegen die elektrischen und magnetischen Vektoren nur zu bestimmten Zeitpunkten in der Wellenebene, und nur zu diesen Zeitpunkten fällt der Poyntingsche Vektor mit der Wellennormale zusammen. Man kann die Wellenebene also nicht mehr mit Hilfe der Vektoren bestimmen, sondern nur noch als Phasenebene definieren. Auch der Zusammenhang zwischen Poyntingschem Vektor und Lichtstrahl ist nicht mehr

so einfach wie bei homogenen Wellen. Wir werden hierauf später (Abschn. 5) noch ausführlicher zurückkommen, da dieser Zusammenhang bei inhomogenen Wellen in einem absorbierenden Medium

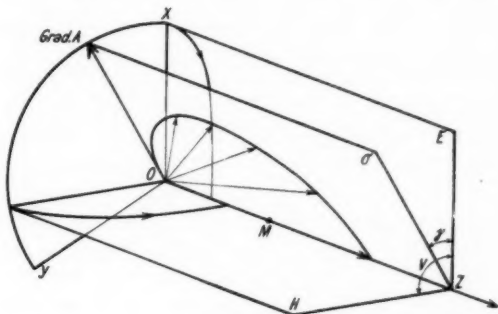


Abb. 1. Der elektrische, der magnetische und der Poyntingsche Vektor sind bei einer (nicht-absorbierten) inhomogenen Welle elliptisch. Die Ebenen der drei Ellipsen schneiden einander in der Normale auf der Wellenebene

komplizierter wird und wir dann erst den allgemeinen Fall vor uns haben.

Hiermit sind die hauptsächlichsten Eigenschaften inhomogener Wellen in einem durchsichtigen Medium abgeleitet. Nachstehend sind sie der Übersicht halber kurz zusammengefaßt:

1. Die Phasengeschwindigkeit hängt nicht mehr ausschließlich vom Medium ab, sondern auch von dem Grad der Inhomogenität ( $b$ ) und wird bei zunehmender Inhomogenität stets geringer [Formel (4b)].

2. Sowohl die elektrische als auch die magnetische Schwingung ist elliptisch. Beide Ellipsen liegen in Ebenen, die durch die Wellennormale gehen.

3. Die Wellenebene kann nur noch als Phasenebene definiert werden. Die Vektoren liegen nur noch zu bestimmten Zeitpunkten darin.

4. Nur inhomogene ebene Wellen, die einer bestimmten Differentialgleichung genügen, können als ebene Wellen fortschreiten.

5. Der Poyntingsche Vektor fällt nur zu bestimmten Zeitpunkten mit der Wellennormale zusammen. Der Zusammenhang zwischen diesem Vektor und den Lichtstrahlen der geometrischen Optik ist näher zu untersuchen (vgl. Abschn. 5).

6. Alle Größen, mit Ausnahme der Phasengeschwindigkeit und des hieraus abgeleiteten Brechungsindex und der Wellenlänge, sind von dem Winkel ( $\gamma$ ) zwischen dem Gradienten und dem elektrischen Vektor in der Wellenebene abhängig.

Von all den am Anfang dieses Abschnittes genannten Eigenschaften der homogenen Wellen ist also keine einzige unverändert geblieben. Wir konnten dies alles aus den Maxwell'schen Gleichungen für Isolatoren ableiten, und zwar mit Hilfe der symbolischen Darstellung der Schwingungen durch eine  $e$ -Funktion. Dies vereinfachte die Berechnungen, ohne jedoch eine bessere Einsicht zu geben.

Wenn wir dieselbe symbolische Darstellung in einer anderen Weise anwenden, werden zwar die Berechnungen zum Teil umständlicher, aber wir erhalten dann nicht nur eine andere Darstellung, sondern der Zusammenhang zwischen den Ergebnissen wird deutlicher. Wir möchten dies erst an dem einfachen Beispiel der inhomogenen Wellen in einem nicht absorbierenden Medium entwickeln. Die darauf folgende Anwendung auf inhomogene Wellen in absorbierenden Medien wird erst die Vorteile dieser Methode zeigen, besonders bei den daraus folgenden Berechnungen der Brechung und Spiegelung.

Durch diese Behandlung werden auch die Einflüsse der Inhomogenität und Absorption deutlicher getrennt.

## 2. Imaginäre Wellen

### (Inhomogene Wellen in einem durchsichtigen Medium)

Wir gehen wiederum von einer inhomogenen elektrischen Schwingung aus, deren Komponente in der Phasenebene als  $X$ -Achse gewählt wird, während die  $Z$ -Achse die Fortpflanzungsrichtung angibt, also

$$\mathfrak{E}_x = A_0 e^{(b x \cos \gamma + b y \sin \gamma)} e^{i(p t - q z)},$$

$$\mathfrak{E}_y = 0$$

usw. Vgl. (5) und (6).

Die Wellenebenen sind hierin die Phasenebenen

$$qz = \text{const} = pt.$$

Bewegt man sich in der Phasenebene in einer willkürlichen Richtung, so verändert sich im allgemeinen die Amplitude. Nur wenn man sich senkrecht zum Gradienten bewegt, bleibt die Amplitude konstant, und da die Gradientenrichtung in der ganzen Ebene konstant ist, sind alle Ebenen, parallel zur  $Z$ -Achse und senkrecht zur Gradientenrichtung, Ebenen gleicher Amplitude.

Wir können die Schwingung jedoch auch wie folgt schreiben:

$$(8) \quad \mathfrak{E}_x = A_0 e^{i(p t - q z - i(b x \cos \gamma + b y \sin \gamma))} \quad \text{usw.}$$

Lassen wir nun in der Gleichung der Wellenebene imaginäre Werte der Koeffizienten zu (wodurch die physikalische Bedeutung verloren geht), so können wir, da die Amplitude in jedem Punkt  $A_0$  ist,

diesen Ausdruck als Formel einer homogenen Welle lesen, deren Phasenebene gegeben ist durch:

$$qz + i(bx \cos \gamma + by \sin \gamma) = \text{const} = pt.$$

Die Schwingung schreitet senkrecht zu dieser fort.

Die Wellennormale  $OZ'$  hat die folgenden Richtungskosinus:

$$\frac{ib \cos \gamma}{\sqrt{q^2 - b^2}}, \quad \frac{ib \sin \gamma}{\sqrt{q^2 - b^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{q^2 - b^2}}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die imaginäre Richtung  $OZ'$  mit  $OZ$  und dem Gradient  $OG$  in einer Ebene liegt.

Nennen wir den Winkel, den dieser imaginäre Lichtstrahl mit dem reellen Lichtstrahl ( $Z$ -Achse) bildet.  $\Theta'$ , so erhalten wir

$$\cos \Theta' = \frac{q}{\sqrt{q^2 - b^2}} \quad \text{oder} \quad \tan \Theta' = \frac{ib}{q} = \frac{ib \lambda}{2\pi}.$$

( $\Theta'$  ist also ein rein imaginärer Winkel.)

Es liegt nun auf der Hand, auf ein Koordinatensystem überzugehen, dessen  $Z'$ -Achse bzw.  $X'Y'$ -Ebene mit dem imaginären Lichtstrahl bzw. der imaginären homogenen Wellenebene zusammenfällt, und darin die durch (5) und (6) bestimmten Wellen zu beschreiben. Über die Richtung der neuen  $X'$  und  $Y'$ -Achsen in der neuen  $X'Y'$ -Ebene kann später noch verfügt werden.

Dies entspricht also einer allgemeinen Achsendrehung, von der wir annehmen, daß sie aus drei partiellen Rotationen entstanden ist (Euler).

1. Drehung um die  $Z$ -Achse um einen Winkel  $\gamma$ , so daß die  $X$ -Achse mit der Richtung  $OG$  des Gradienten zusammenfällt.

2. Drehung um  $ON$  (Normale auf der Ebene  $GOZ$ ) um einen Winkel  $\Theta'$ , so daß die  $X$ - und  $Y$ -Achsen in die imaginäre Wellenebene zu liegen kommen.

3. Zurückdrehung der  $X$ - und  $Y$ -Achse um  $OZ'$  um einen Winkel  $\gamma'$  (der später bestimmt werden wird), so daß auch die  $X$ - und  $Y$ -Achsen ihren neuen Stand erhalten.

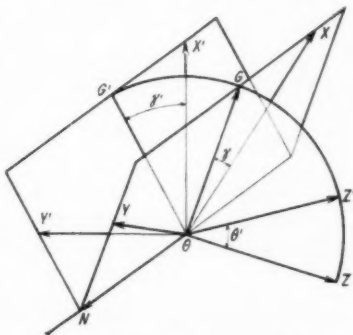


Abb. 2. Allgemeine Achsendrehung bestehend aus den drei partiellen Rotationen  $\gamma$  um  $OZ$ ,  $\Theta'$  um  $ON$  und  $-\gamma'$  um  $OZ'$



Dies ergibt die folgenden Transformationsformeln:

$$(9) \quad \begin{cases} x = \{\cos \Theta' \cos \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma \sin \gamma'\} x' \\ \quad + \{\cos \Theta' \cos \gamma \sin \gamma' - \sin \gamma \cos \gamma'\} y' + \sin \Theta' \cos \gamma z', \\ y = \{\cos \Theta' \sin \gamma \cos \gamma' - \cos \gamma \sin \gamma'\} x' \\ \quad + \{\cos \Theta' \sin \gamma \sin \gamma' + \cos \gamma \cos \gamma'\} y' + \sin \Theta' \sin \gamma z', \\ z = -\sin \Theta' \cos \gamma x' - \sin \Theta' \sin \gamma y' + \cos \Theta' z' \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$(9a) \quad \begin{cases} x' = \{\cos \Theta' \cos \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma \sin \gamma'\} x \\ \quad + \{\cos \Theta' \sin \gamma \cos \gamma' - \cos \gamma \sin \gamma'\} y - \sin \Theta' \cos \gamma z, \\ y' = \{\cos \Theta' \cos \gamma \sin \gamma' - \sin \gamma \cos \gamma'\} x \\ \quad + \{\cos \Theta' \sin \gamma \sin \gamma' + \cos \gamma \cos \gamma'\} y - \sin \Theta' \sin \gamma z, \\ z' = \sin \Theta' \cos \gamma x + \sin \Theta' \sin \gamma y + \cos \Theta' z. \end{cases}$$

Wenn wir die Gleichung der imaginären Wellenebene

$$qz + i(bx \cos \gamma + by \sin \gamma) = \text{const} = pt$$

mit Hilfe der Formeln (9) transformieren, so erhalten wir nach der Umrechnung:

$$\sqrt{q^2 - b^2} z' = pt = \text{const.}$$

Diese imaginäre homogene Wellenebene schreitet also in der imaginären  $Z'$ -Richtung fort mit einer Geschwindigkeit

$$c'' = \frac{p}{\sqrt{q^2 - b^2}}.$$

Diese Geschwindigkeit ist also reell. Sie muß unabhängig sein von der ursprünglichen Inhomogenität, und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Mediums für homogene Wellen entsprechen, also

$$c'' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Aus diesen zwei Werten für  $c''$  können wir nun ableiten:

$$q^2 - b^2 = \epsilon \mu \frac{p^2}{c^2},$$

welche Beziehung wir im ersten Abschnitt als (4) aus der Schwingungsgleichung fanden. Da  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ , gibt diese Beziehung an, daß die Wellenlänge, außer vom Medium, auch von der Inhomogenität abhängt. Ferner folgt hieraus, daß der Brechungsindex für die imaginäre Welle

$$n' = \frac{c}{c''} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

ist und der Zusammenhang mit dem Brechungsindex der reellen Welle durch

$$n' = \frac{n}{q} \sqrt{q^2 - b^2}$$

gegeben wird.

Die Formeln für die elliptischen  $\mathfrak{E}$ - und  $\mathfrak{H}$ -Schwingungen können nun mit Hilfe von (9a) auch transformiert werden. Da diese Transformation die Welle homogen macht, müssen wir für beide lineare Schwingungen finden. Wir können noch über den Winkel  $\gamma'$  verfügen und tun dies, indem wir den transformierten  $\mathfrak{E}$ -Vektor als neue  $X'$ -Achse nehmen.

Dies hat zur Folge, daß die Projektion der  $X'$ -Achse auf der  $Y$ -Achse gleich Null ist, also muß in (9)

$$\cos \Theta' \sin \gamma \cos \gamma' - \cos \gamma \sin \gamma' = 0$$

sein. Hieraus erhält man den folgenden Wert für  $\gamma'$ :

$$\operatorname{tg} \gamma' = \operatorname{tg} \gamma \cos \Theta' = \frac{q}{\sqrt{q^2 - b^2}} \operatorname{tg} \gamma.$$

Dies ergibt:

$$\sin \gamma' = \frac{q \sin \gamma}{\sqrt{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}} \quad \text{und} \quad \cos \gamma' = \frac{\sqrt{q^2 - b^2} \cos \gamma}{\sqrt{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}}.$$

Substituieren wir diese Werte und die in Abschn. 1 für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  gefundenen in (9a), so ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{x'} = \frac{\sqrt{q^2 - b^2 \cos^2 \gamma}}{q} A_0 e^{i(p t - z' \sqrt{q^2 - b^2})} \equiv A_0' e^{i(p t - q'' z)}, \\ \mathfrak{E}_{y'} = \mathfrak{E}_{z'} = 0, \\ \mathfrak{H}_{x'} = \mathfrak{H}_{z'} = 0, \\ \mathfrak{H}_{y'} = \frac{n'}{\mu} A_0' e^{i(p t - q'' z)}. \end{array} \right.$$

Dies sind tatsächlich zwei lineare Schwingungen gleicher Phase, wie sie bei einer homogenen Welle auftreten.

Wir können nun die Beweisführung auch umkehren und von einer homogenen Welle, die in einer imaginären Richtung fortschreitet, ausgehen und die hierbei auftretenden linearen Schwingungen in ein reelles Koordinatensystem projizieren. Die Vektoren ergeben dann teilweise reelle, teilweise imaginäre Projektionen in den drei neuen Achsenrichtungen. Nimmt man hiervon in der bekannten Weise den reellen Teil, so findet man die elliptischen Schwingungen für die inhomogene Welle.

Die reelle inhomogene Welle (mit elliptischen  $\mathfrak{E}$ - und  $\mathfrak{H}$ -Schwingungen) ist also der reelle Teil der Projektion einer homogenen Welle

(mit linearen Schwingungen), die in einer von der Inhomogenität bestimmten imaginären Richtung fortschreitet.

Der Poyntingsche Vektor kann nicht direkt durch Projektion gefunden werden, da Multiplikation in der symbolischen Schreibweise nicht zulässig ist.

### 3. Komplexe Wellen (Inhomogene Wellen in einem absorbierenden Medium)

Die neue Erkenntnis ermöglicht es uns, die Eigenschaften inhomogener Wellen in absorbierenden Medien auf vollkommen andere Weise als üblich abzuleiten. In der sogenannten Metalloptik nimmt man an, daß die Absorption eine Folge der Leitfähigkeit  $\sigma$  des Mediums ist und verwendet in Übereinstimmung hiermit die Gleichungen

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma \mathfrak{E} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, & \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}, & \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \end{array} \right.$$

und die dazu gehörende Schwingungsgleichung mit Dämpfungsglied:

$$(10a) \quad \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + 4\pi\mu\sigma \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathfrak{E}.$$

Man versucht, dieser mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathfrak{E}_x = A e^{-q''z} e^{i(p t - qz)}, \quad \mathfrak{E}_y = 0$$

zu genügen, d. h. mit Hilfe einer gedämpften fortschreitenden Welle, mit dem Absorptionskoeffizienten  $q''$ . Muß diese Welle inhomogen sein, also von dem im zweiten Abschnitt behandelten Typ, mit konstanter Gradientenrichtung, so hängt es von der Orientierung von  $\mathfrak{E}_x$  in bezug auf diesen Gradienten ab, ob die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

eine Z-Komponente für die elektrische Kraft ergibt oder nicht. Man behandelt dann stets nur die zwei Hauptfälle, bei denen die elektrische Kraft in der Wellenebene senkrecht oder parallel zu diesem Gradienten steht und hat dadurch keine Übersicht über den bestehenden Zusammenhang.

Wir wollen daher eine willkürliche Orientierung von  $\mathfrak{E}_x$  in bezug auf den Gradienten annehmen. Ferner werden wir keinen Gebrauch von den Maxwellschen Gl. (10) machen, sondern von der Gleichung für einen Isolator, und die gesuchten Gleichungen aus einer Achsendrehung ableiten, und zwar, wie aus Nachstehendem hervorgehen wird, aus einer Achsendrehung um einen komplexen Winkel.

Vorher möchten wir jedoch noch zeigen, daß die Wellen, die bei Brechung in einem absorbierenden Medium entstehen, tatsächlich dem bisher behandelten Typ mit konstanter Inhomogenität entsprechen, da wir schließlich das Brechungsgesetz für ein absorbierendes Medium und die dazugehörigen Fresnel'schen Formeln ableiten wollen.

Wir postulieren daher nur, daß die Amplitude an einer Normale (die wir wieder zur Z-Achse wählen) entlang abnimmt, und zwar mit einer  $e$ -Potenz, mit dem Koeffizienten  $q''$ .

Es ist nun deutlich, daß sich die Amplitude in einer Phasenebene ändert, und zwar am stärksten in der  $l$ -Richtung:

$$A_l = A_0 e^{q'' l \lg q},$$

wenn  $q$  der Brechungswinkel der Normale ist. Nehmen wir nun eine willkürliche X-Achse in der Phasenebene an, und nennen wir den Winkel zwischen der X-Achse und dem Gradienten wiederum  $\gamma$ , so können wir für die elektrische Kraft in einem willkürlichen Punkt  $P(x y z)$  annehmen:

$$(11) \quad \mathcal{E}_x = A_0 e^{q'' l \lg q} (x \cos \gamma + y \sin \gamma) - q'' z e^{i(p l - q' z)},$$

und zwar ist hierin

$$q' = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad p = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Die Phasengeschwindigkeit an der Z-Achse entlang beträgt:

$$(11a) \quad c' = \frac{p}{q'}.$$

Nach den in Abschn. 1 gegebenen Ausführungen ist die Inhomogenität dieser Welle nun:

$$(12) \quad b^2 \equiv \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) : A = q''^2 \lg^2 q.$$

Hieraus folgt, daß die Inhomogenität  $q'' \lg q$  konstant ist und durch den Brechungswinkel und das Medium gegeben ist.

Die Ebenen konstanter Amplitude sind:

$$q'' \lg q (x \cos \gamma + y \sin \gamma) - q'' z = \text{const.}$$

Sie bilden mit den Phasenebenen  $Z = \text{konstant}$  einen Winkel  $\varphi$  und laufen also mit der Grenzebene parallel, was bei Betrachtung von Abb. 3 evident ist.

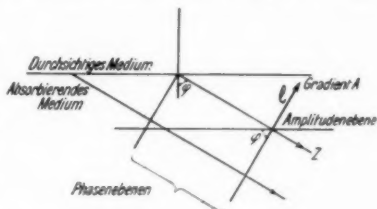


Abb. 3. Bei Brechung in einem absorbierenden Medium entsteht eine inhomogene Welle. Der Gradient  $l$  liegt in der Einfallsebene

Wir schreiben den Ausdruck für die elektrische Schwingungskomponente nun wieder:

$$\mathcal{E}_x = A_0 \cdot e^{i(p t - (q' - i q'') x - i(b x \cos \gamma + b y \sin \gamma))}$$

und haben auf diese Weise wieder eine homogene, nicht absorbierte Welle erhalten, die eine komplexe Wellenebene besitzt:

$$(13) \quad i b x \cos \gamma + i b y \sin \gamma + (q' - i q'') z = \text{const} = p t$$

die in der Richtung  $N'$  mit dem Richtungskosinus:

$$(13a) \quad \frac{i b \cos \gamma}{\sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2}}, \quad \frac{i b \sin \gamma}{\sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2}}, \quad \frac{q' - i q''}{\sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2}}$$

fortschreitet.

Auch diese komplexe Normalenrichtung liegt wieder in der Ebene, worin die reelle Normale ( $Z$ -Achse) und der Gradient liegen (und liegt also bei Brechung in der Einfallsebene), denn die Normale auf dieser Ebene hat als Richtungskosinus  $(-\sin \gamma)$ ,  $(\cos \gamma)$ ,  $(0)$  und steht also nach (13a) senkrecht auf  $N'$ .

Wir können daher dieselbe Transformation anwenden wie im vorigen Abschnitt; der Drehungswinkel  $NO N' = \Theta'$  ist nun so, daß

$$\cos \Theta' = \frac{q' - i q''}{\sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2}}.$$

Wir transformieren nun die komplexe Wellenebene mit Hilfe der Formeln (9). Die Rechnung ergibt:

$$(13b) \quad z' \sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2} = p t.$$

Hieraus folgt, daß die komplexe Phasengeschwindigkeit an  $N'$  entlang:

$$c' = \frac{dz'}{dt} = \frac{p}{\sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2}}$$

beträgt.

Unter Verwendung von (11a) erhalten wir dann:

$$c'' = \frac{c'}{\sqrt{-\frac{b^2}{q'^2} + \left(1 - i \frac{q''}{q'}\right)^2}}.$$

Nun führen wir außer dem Absorptionskoeffizienten  $q''$  je Längeneinheit den Absorptionsindex  $k = \frac{q''}{q'}$  ein; oder

$$k = \frac{q'' \lambda}{2\pi}$$

d. i. der Absorptionskoeffizient je Wellenlänge:  $2\pi$ .

Ferner ist nach (12) die Inhomogenität  $b = q'' \operatorname{tg} \varphi$ , also

$$\frac{b}{q'} = k \operatorname{tg} \varphi,$$

so daß der Ausdruck jetzt geschrieben wird:

$$c'' = \frac{c'}{\sqrt{-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + (1 - i k)^2}}$$

oder wenn  $n$  und  $n'$  die Brechungsindizes für die reellen und komplexen Wellen sind:

$$n'^2 = n^2 \{-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + (1 - i k)^2\}$$

oder

$$(14) \quad n'^2 = n^2 \left(1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi}\right) - 2 i n^2 k.$$

Da die komplexe Welle homogen und nicht absorbiert ist, muß dieser komplexe Brechungsindex unveränderlich sein, ganz gleich wie die Absorption  $k$  oder die Inhomogenität  $k \operatorname{tg} \varphi$  der reellen Welle ist, und nur von den Materialkonstanten des Mediums abhängen. Dies ist nur möglich, wenn sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil unveränderlich sind, also

$$(14a) \quad n^2 \left(1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi}\right) = \text{const} \quad n^2 k = \text{const}.$$

Wenn wir die Werte, die  $n$  und  $k$  bei einer Inhomogenität = Null annehmen, also z. B. bei senkrechtem Einfall in ein absorbierendes Medium,  $n_0$  und  $k_0$  nennen, so erhalten wir

$$(14b) \quad n^2 \left(1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi}\right) = n_0^2 (1 - k_0^2) \quad n^2 k = n_0^2 k_0$$

$$(14c) \quad \begin{cases} n'^2 = n^2 \left(1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi}\right) - 2 i n^2 k = n_0^2 (1 - k_0^2) - 2 i n_0^2 k_0 \\ \quad = n_0^2 (1 - i k_0)^2. \end{cases}$$

Auf diese Weise haben wir die drei Grundgleichungen der Metalloptik abgeleitet aus der Transformation zu einer homogenen, nicht absorbierten Schwingung, für die folgende Formel gilt:

$$n' = \text{invariant}.$$

Leitet man nun die Beziehungen (14b) direkt aus den Maxwell'schen Gleichungen für einen Leiter ab, so ergeben sie sich aus der Schwingungsgleichung (10a)

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + 4 \pi \mu \sigma \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathfrak{E}.$$

Substituiert man hierin die elektrische Schwingung (11), so findet man:

$$(15a) \quad n^2 \left(1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi}\right) = \varepsilon \mu \quad n^2 k = \mu \sigma \tau.$$

Verbindet man die beiden Ausdrücke auf die in (14) gefundene Weise:

$$(15b) \quad n'^2 = \varepsilon \mu - 2 i \mu \sigma \tau = (\varepsilon - i 2 \sigma \tau) \mu \equiv \varepsilon' \mu$$

so kommt man zu der komplexen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon'$ , die sonst eingeführt wird, um die Absorption des Mediums zu eliminieren<sup>1)</sup>. Denn die Substitution

$$\epsilon' = \epsilon - i 2 \sigma \tau$$

läßt bei periodischen Lösungen mit Schwingungsdauer  $\tau$  in (10a) das Dämpfungsglied verschwinden. Die Lösung ist dann eine ungedämpfte, also nicht absorbierte Welle. Man wendet dann die Ergebnisse, die man für durchsichtige Medien fand, auf die Leiter an, denen man dabei einen komplexen Brechungsindex  $n'$  zuerkennt. Für homogene Wellen ist dies sicherlich gerechtfertigt. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf inhomogenen Wellen ohne weitere Begründung ist jedoch nicht zulässig, da bei diesen der Brechungsindex auch von der Inhomogenität abhängt. Man hat das Medium transformiert, aber es fehlt vollständig die Einsicht, daß die Anwendung nur daher richtig ist, weil gleichzeitig die Inhomogenität verschwunden ist. Unseres Erachtens ist diese Einsicht bei dem von uns gefolgten Weg wohl vorhanden. Es sind jedoch außerdem noch einige andere Vorteile zu nennen.

So fanden wir, daß die durch den komplexen Brechungsindex (oder das komplexe Brechungsgesetz) gegebene Richtung der Normale ebenfalls in der Einfallsebene liegt, eine Tatsache, die man sonst immer stillschweigend übergeht.

Den Zusammenhang mit den elektrischen Konstanten des Mediums ( $\epsilon \mu \sigma$ ) haben wir nicht gefunden, wohl aber die Beziehungen (14) zwischen den optischen Größen. Diese reichen jedoch zur Beschreibung der optischen Erscheinungen in absorbierenden Medien aus, um so mehr als es sehr viele stark absorbierende Stoffe (z. B. Farbstoffe) gibt, bei denen (im Gegensatz zu den Metallen), von einer Leitfähigkeit keine Rede ist. Der von uns verfolgte Weg, bei dem nur die Absorption als solche eingeführt wird, bietet daher auch in dieser Hinsicht bestimmte Vorteile.

Wir können uns außerdem eine inhomogene Welle vorstellen, die senkrecht in ein absorbierendes Medium einfällt, und diesen Fall nun auf einfache Weise behandeln. Denn der Ausdruck

$$n^2 \left( 1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} \right)$$

ist entstanden aus

$$n^2 (1 - k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi).$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. die Abhandlung von W. König, Handbuch der Physik, Bd. XX, S. 240.



Ersetzen wir nun  $k \operatorname{tg} \varphi$  durch die Inhomogenität  $b/q'$ , so erhalten wir in diesem Falle die folgende Lösung:

$$n^2 \left( 1 - k^2 - \frac{b^2 \lambda^2}{4 n^2} \right) = n_0^2 (1 - k_0^2)$$

$$n^2 k = n_0^2 k_0$$

in der  $b$  jeden denkbaren Wert, unabhängig von  $k$ , haben kann.

Die Einflüsse der Inhomogenität und Absorption sind vollkommen getrennt, und man kann für jeden Wert von  $b$  die Werte von  $n$  und  $k$  berechnen. Wir kommen hierauf noch in Abschn. 7 zurück.

Schließlich gibt uns die gefundene Achsendrehung noch einen anderen Einblick in die ziemlich komplizierten Ausdrücke für die elliptischen, elektrischen und magnetischen Schwingungen, die wir jetzt ableiten wollen, wenn wir sie als die Projektionen der Vektoren der homogenen komplexen Welle betrachten, die aus (13b) folgt.

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = A'_0 e^{i(p t - V - b^2 + (q' - i q'')^2 \cdot x)} \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0 & \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0 \\ \mathfrak{H}_y = \frac{n'}{\mu} A'_0 e^{i(p t - V - b^2 + (q' - i q'')^2 \cdot x)} \end{cases}$$

Die Projektion dieser Vektoren auf die reellen  $X$ -,  $Y$ - und  $Z$ -Achsen erfolgt wiederum mit Hilfe der Transformationsformeln (9), in denen nach (13a)

$$\cos \Theta' = \frac{q' - i q''}{\sqrt{-b^2 + (q' - i q'')^2}}$$

Also

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{i b}{q' - i q''} = \frac{i k \operatorname{tg} \varphi}{1 - i k} = \frac{k \operatorname{tg} \varphi}{1 + k^2} (-k + i).$$

Wir wählen  $\gamma'$  wieder so, daß  $\mathfrak{E}_y = 0$  und erhalten dann (vgl. Abschn. 2)

$$\operatorname{tg} \gamma' = \cos \Theta' \operatorname{tg} \gamma = \frac{1 - i k}{\sqrt{-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + (1 - i k)^2}}$$

oder

$$\sin \gamma' = \frac{(1 - i k) \sin \gamma}{\sqrt{-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma + (1 - i k)^2}}$$

und

$$\cos \gamma' = \frac{\left\{ \left( 1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} \right) - 2 i k \right\} \cos \gamma}{\sqrt{-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma + (1 - i k)^2}}$$

Mit diesen Werten finden wir nun durch Projektion der komplexen Welle (16) auf einmal alle Komponenten der reellen inhomogenen absorbierten Welle, und zwar erst mit komplexen Amplituden. Dies ist jedoch die symbolische Schreibweise für Amplitude und Phase in einem Ausdruck.

Da  $\mathfrak{E}_y$  und  $\mathfrak{E}_z$  beide Null sind, wird die Transformationsformel für  $\mathfrak{E}_x$  wie folgt geschrieben:

$$\text{Ampl. } \mathfrak{E}_x = \{\cos \Theta' \cos \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma \sin \gamma'\} A_0'.$$

Hieraus

$$\text{Ampl. } \mathfrak{E}_x = \frac{(1 - ik) A_0'}{\sqrt{(1 - ik)^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}} \equiv A_0.$$

Diese Amplitude kommt in allen  $\mathfrak{E}$ - und  $\mathfrak{H}$ -Komponenten als Faktor vor. Wir nennen sie  $A_0$ ;  $A_0'$  hat daher den folgenden Wert:

$$(19) \quad A_0' = A_0 \frac{\sqrt{(1 - ik)^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}}{(1 - ik)}.$$

Auf diese Art erhalten wir  $\text{Ampl. } E_x = A_0$ . Dies ist eine reelle Amplitude; dies bedeutet nur, daß wir den Zeitursprung nun so gewählt haben, daß in

$$\mathfrak{E}_x = A_0 e^{(q'' \operatorname{tg} \varphi (x \cos \gamma + y \sin \gamma) - q'' z)} \sin(p t - q' z - \delta)$$

$\delta = 0$  ist.

Alle anderen Komponenten erhalten eine komplexe Amplitude und sind also in Phase in bezug auf  $\mathfrak{E}_x$  verschoben. Die Transformation ergibt nun die folgenden Amplituden und Phasen für die Komponenten:

Vektor	Amplitude	Phase $\operatorname{tg} \delta =$
(20 a) $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x \\ \mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{E}_z \end{array} \right.$	$A_0$	0
	0	
	$\frac{k \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{\sqrt{1 + k^2}} A_0$	$\frac{1}{k}$
(20 b) $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_x \\ \mathfrak{H}_y \\ \mathfrak{H}_z \end{array} \right.$	$\frac{n}{\mu} \frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{1 + k^2}} A_0$	$-k$
	$\frac{n}{\mu} \sqrt{\frac{4k^2 + (1 - k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)^2}{1 + k^2}} A_0$	$k \frac{1 + k^2 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}$
	$\frac{n}{\mu} k \operatorname{tg} \varphi \sin \gamma A_0$	$\infty$

Hiermit sind die elektrischen und magnetischen Schwingungen abgeleitet, ohne von den Maxwell'schen Gleichungen für absorbierende Medien Gebrauch zu machen. Hierbei ist die Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors in der Phasebene in bezug auf den Gradienten noch willkürlich. Bei  $\gamma = 0$  und  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  gehen die Formeln über in die für die zwei Spezialfälle, wo die elektrische Schwingungs-

komponente in der Phasenebene mit dem Gradienten zusammenfällt (bei Brechung in der Einfallsebene liegt) und senkrecht darauf steht<sup>1)</sup>.

Aus den gefundenen Ausdrücken ersehen wir, daß beide Schwingungen elliptisch sind. Der elektrische Vektor bewegt sich auch hier wiederum in einer Ebene, die durch die Normale geht, und die wir als  $XZ$ -Ebene gewählt haben. Die Ebene des magnetischen Vektors steht jedoch nun vollkommen willkürlich. Ihr Stand wird durch die drei Größen  $k$ ,  $\varphi$  und  $\gamma$  bestimmt.

Um später die Beziehung zwischen Poyntingschem Vektor und Lichtstrahl ableiten zu können, möchten wir nun hier die Ebene des magnetischen Vektors bestimmen. Zu diesem Zweck schreiben wir die Koordinaten der Vektorspitze wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \sin(\Theta - \delta_1), \\ y &= A_2 \sin(\Theta - \delta_2), \\ z &= A_3 \sin(\Theta - \delta_3). \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Die hierin angegebenen Werte} \\ \text{für } A \text{ und } \delta \text{ folgen aus (20b),} \\ \text{während } \Theta = pt = 2\pi \frac{t}{\tau}. \end{array}$$

Dies ist also eine Raumkurve, in der  $\Theta$  Parameter ist. Wenn wir nun in einem Punkt  $\Theta$  die Oskulationsebene anbringen, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} X - A_1 \sin(\Theta - \delta_1) & Y - A_2 \sin(\Theta - \delta_2) & Z - A_3 \sin(\Theta - \delta_3) \\ A_1 \cos(\Theta - \delta_1) & A_2 \cos(\Theta - \delta_2) & A_3 \cos(\Theta - \delta_3) \\ -A_1 \sin(\Theta - \delta_1) & -A_2 \sin(\Theta - \delta_2) & -A_3 \sin(\Theta - \delta_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Ausgeschrieben ist dies:

$$X A_2 A_3 \sin(\delta_2 - \delta_3) + Y A_3 A_1 \sin(\delta_3 - \delta_1) + Z A_1 A_2 \sin(\delta_1 - \delta_2) = 0.$$

Aus diesem Ausdruck ist  $\Theta$  verschwunden, das besagt also, daß die Oskulationsebene an allen Punkten der Kurve die gleiche ist, mit anderen Worten, die Kurve ist eben. Die Richtungskosinus der Wellennormale auf ihrer Ebene sind:

$$A_2 A_3 \sin(\delta_2 - \delta_3) : A_3 A_1 \sin(\delta_3 - \delta_1) : A_1 A_2 \sin(\delta_1 - \delta_2).$$

Substituiert man hierin die Werte aus (20b), so ergibt dies nach Umformung:

$$(21a) \quad (1 + k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma) : (-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \gamma \cos \gamma) : (2k^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma)$$

Die Ebene, in der sich der magnetische Vektor bewegt, entspricht der folgenden Gleichung:

$$(21b) \quad \begin{cases} (1 + k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma) X \\ -k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \gamma \cos \gamma Y + 2k^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma Z = 0. \end{cases}$$

1) Z. B. entstehen für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  die Formeln 98, S. 195, und für  $\gamma = 0$  die Formeln 99, S. 196, der Abhandlung von König im Handb. d. Phys. XX. Da in beiden Fällen  $\mathfrak{S}_x = 0$ , fehlt diese Komponente dort vollkommen.

Sie bildet mit der Ebene des elektrischen Vektors ( $XZ$ -Ebene) einen Winkel  $V$ , so daß

$$(21c) \quad \cos V = \frac{-k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{4k^2 + (1 - k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)^2 + k^4 \operatorname{tg}^4 \varphi \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma}}.$$

Nur in den Spezialfällen  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  und  $\varphi = 0$  (homogene Welle) stehen die Ebenen senkrecht zueinander. Bei willkürlichem  $\gamma$  und sehr großer Inhomogenität ( $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ ) nähert sich der Winkel

$$(\cos V)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \sin \gamma.$$

Die Ebene des magnetischen Vektors dreht sich also bei zunehmender Inhomogenität zum elektrischen Vektor hin, jedoch nicht weiter, als bis der Gradient darin liegt.

Die Schnittlinie der zwei Ebenen wird gegeben durch

$$(21d) \quad \begin{cases} (1 + k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)X + 2k^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma Z = 0, \\ Y = 0. \end{cases}$$

Diese Schnittlinie hat eine besondere Bedeutung. Im folgenden Abschnitt, der über den Poyntingschen Vektor handelt, wird man sehen, daß der Energietransport in dieser Richtung stattfindet und daß wir die Schnittlinie mit dem Lichtstrahl der geometrischen Optik identifizieren müssen. Haben wir einmal den Poyntingschen Vektor bestimmt, so wird es möglich sein, die Achsenrichtungen der gefundenen elektrischen und magnetischen Ellipsen auf einfache Weise anzugeben, und zwar in einem neuen schiefwinkligen Koordinatensystem.

#### 4. Poyntingscher Vektor

Der zu diesen  $\mathcal{E}$ - und  $\mathcal{H}$ -Vektoren gehörende Poyntingsche Vektor wird wiederum abgeleitet aus:

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathcal{E}, \mathcal{H}],$$

und zwar wird er am besten erst in seine  $XYZ$ -Komponenten zerlegt. Also

$$\mathcal{S}_x = \frac{c}{4\pi} (\mathcal{E}_y \mathcal{H}_z - \mathcal{E}_z \mathcal{H}_y) \quad \text{usw.}$$

Zur Vereinfachung berechnen wir  $\mathcal{S}$  für den Ursprung. Da die Komponenten  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$  alle eine andere Phase haben (vgl. 20), erhalten die Produkte die Form

$$(22) \quad A_e A_m \sin(\Theta - \delta_e) \sin(\Theta - \delta_m).$$

Diese werden wir stets umformen mit Hilfe der Identität:

$$\sin(\Theta - \delta_e) \sin(\Theta - \delta_m) = -\frac{1}{2} \cos\{2\Theta - (\delta_e + \delta_m)\} + \frac{1}{2} \cos(\delta_e - \delta_m).$$

Da  $\Theta = 2\pi \frac{t}{\tau}$ , zerlegen wir diese Produkte also in einen harmonischen und einen konstanten Teil. Führen wir diese Berechnung aus mit den in (20a) und (20b) gefundenen Werten, so erhalten wir:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 \frac{-k \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{(1+k^2)^2} \\ &\quad \cdot [2k^3 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma \cos 2\Theta - \{(1+k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma) \\ &\quad + k^2(1+k^2 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)\} \sin 2\Theta + 2k(1+k^2)], \\ \mathcal{E}_y &= \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 \frac{-k \operatorname{tg} \varphi \sin \gamma}{(1+k^2)^2} \\ &\quad \cdot [2k^3 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma \cos 2\Theta - \{(1+k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma) \\ &\quad + k^2(1+k^2 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)\} \sin 2\Theta], \\ \mathcal{E}_z &= \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 \frac{1}{1+k^2} \\ &\quad \cdot [-(1+k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma) \cos 2\Theta \\ &\quad - k(1+k^2 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma) \sin 2\Theta \\ &\quad + (1+k^3 - k^3 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)]. \end{aligned} \right.$$

Obgleich diese Ausdrücke ziemlich kompliziert sind, können wir uns doch von diesem Poyntingschen Vektor auf einfache Weise ein Bild machen. Wir setzen den Faktor

$$\frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 = 1,$$

d. h. wir nehmen an, daß die Intensität der Einheit gleich ist, wenn die Absorption des Mediums gleich null ist.

Wir betrachten die Kurve, die durch die Spitze des Vektors beschrieben wird, und stellen diese vorübergehend dar durch:

$$(24) \quad \begin{cases} x = A_1 \cos \gamma \sin(2\Theta - \delta_1) + B_1, \\ y = A_1 \sin \gamma \sin(2\Theta - \delta_1), \\ z = A_3 \sin(2\Theta - \delta_3) + B_3. \end{cases}$$

Berechnet man in einem willkürlichen Punkt die Oskulationsebene:

$$(24a) \quad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

so kommt auch hierin, genau wie beim magnetischen Vektor,  $\Theta$  wiederum in Wegfall. Die Oskulationsebene ist also von  $\Theta$  unabhängig und in allen Punkten die gleiche. Die Kurve ist also eben. Da sie drei Ellipsen als Projektionen auf den Koordinatenebenen hat, ist sie selbst auch eine Ellipse. Nur liegt ihr Mittelpunkt jetzt in  $M$ :

$$(24b) \quad \begin{cases} x_M = B_1 = \frac{-2k^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{1+k^2}, \\ y_M = 0, \\ z_M = B_3 = \frac{1+k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1+k^2}, \end{cases}$$

d. h.  $M$  liegt auf der Schnittlinie (21d) der elektrischen und magnetischen Ebene.

Wir müssen nun untersuchen, ob die Oskulationsebene, genau wie früher bei dem Poyntingschen Vektor einer inhomogenen, nicht absorbierten Welle durch  $O$  geht, also ob der Vektor sich auch nun wieder in einer Ebene bewegt.

Substitution von (24) in (24a) ergibt ausgearbeitet:

$$(X - B_1) A_1 A_3 \sin \gamma \sin (\delta_1 - \delta_3) - Y A_1 A_3 \cos \gamma \sin (\delta_1 - \delta_3) = 0$$

oder

$$(24c) \quad (X - B_1) \sin \gamma - Y \cos \gamma = 0.$$

Dies ist eine Ebene durch  $M$ , parallel zur  $Z$ -Achse, die mit der  $X$ -Achse einen Winkel  $\gamma$  bildet, also auch parallel zum Gradienten in der Phasenebene liegt. Diese Ebene geht also nicht durch  $O$ .

Der Poyntingsche Vektor beschreibt nun also einen Kegel, dessen Spitze in  $O$  liegt und dessen Leitkurve eine Ellipse ist in einer Ebene, die parallel zur  $Z$ -Achse und zum Gradienten läuft. Der Mittelpunkt  $M$  der Ellipse liegt in der  $ZX$ -Ebene. Dieser Kegel wird wegen  $2\theta$  in einer Schwingungszeit zweimal durchlaufen (vgl. Abb. 4).

Schließlich wollen wir noch die Achsen der Ellipse bestimmen. Zu diesem Zweck gehen wir auf ein neues Koordinatensystem  $O'X'Y'Z'$  über. Hierin ist die Gleichung der Leitkurve wie folgt zu schreiben:

$$x' = D_1 \sin 2\theta + D_2 \cos 2\theta,$$

$$y' = 0,$$

$$z' = E_1 \sin 2\theta + E_2 \cos 2\theta + E_3.$$

Die Werte von  $D_1, D_2, E_1$  und  $E_2$  folgen aus (23). Um nun auf die Achsen der Ellipse überzugehen, müssen die  $X'$ - und  $Z'$ -Achse um einen Winkel  $\alpha$  gedreht werden, so daß der Koeffizient des Gliedes  $X''Z''$  gleich null wird. Nach einer ziemlich umständlichen Berechnung erhält man für  $\alpha$  den Wert:

$$(25) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(D_1 E_1 + D_2 E_2)}{D_1^2 + D_2^2 - (E_1^2 + E_2^2)} = \frac{2k^2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Dieser Winkel ist also von der Schwingungsrichtung  $\gamma$  unabhängig. Es liegt nun auf der Hand, diese Achsenrichtungen mit den bereits gefundenen Ebenen des magnetischen und elektrischen Vektors in

Zusammenhang zu bringen, und tatsächlich besteht solch ein einfacher Zusammenhang. Die Ebene  $R$  der Leitkurve wird nämlich in  $M$  von den Schwingungsebenen  $E$  und  $H$  geschnitten, und zwar durch die Linien  $O'M$  und  $SM$ . Der Winkel zwischen beiden Linien hat auch denselben Wert  $2\alpha$ , d. h. die Achsen der Ellipse halbieren die Winkel zwischen den Schnittpunkten.

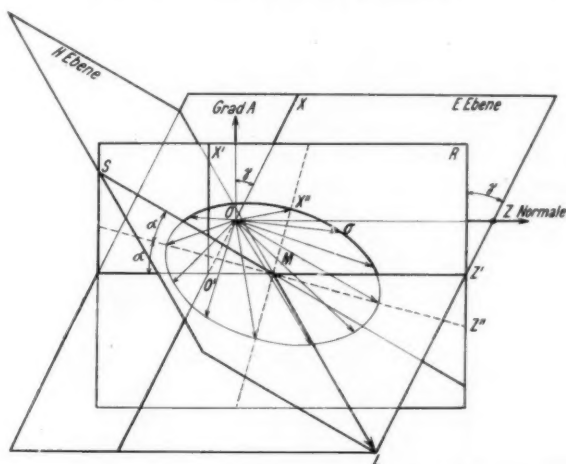


Abb. 4. Lage des Kegels, der von dem Poyntingschen Vektor durchlaufen wird, in bezug auf die Ebenen des elektrischen und magnetischen Vektors. Die Achse  $O'ML$  des schiefen Kegels ist die Schnittlinie der  $E$ - und  $H$ -Ebenen

Wir können auch die Längen der Achsen berechnen und finden hierfür:

$$(25a) \quad \text{Achse} = \sqrt{\frac{2k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \{4k^2 + (1 - k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)^2\}}{(1 + k^2)^2 \{1 + k^2 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi\} \pm \sqrt{4k^2 + (1 - k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2}}}$$

Sind  $k$  und  $k \operatorname{tg} \varphi$  so klein daß wir höhere Potenzen als die zweite vernachlässigen können, so wird der Ausdruck viel einfacher, und wir finden für das Verhältnis der Achsen bei erster Annäherung

$$(25b) \quad \frac{Z''\text{-Achse}}{X''\text{-Achse}} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k \operatorname{tg} \varphi}$$

Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Schwingungsrichtung.

Alle Größen, die die Gestalt des Kegels bestimmen, sind Funktionen des Absorptionsindex  $k$ , der Inhomogenität  $k \operatorname{tg} \varphi$  und der Orientierung  $\gamma$  des Gradienten in bezug auf die Ebene des elektrischen Vektors. Wir wollen nun, nach dem allgemeinen Fall, auch noch vier spezielle betrachten, und zwar die beiden besonderen Orientierungen des





3.  $k = 0 \quad k \operatorname{tg} \varphi \neq 0.$

$\alpha = 0$ ,  $\gamma$  willkürlich. Die Ellipse liegt in der Ebene, die durch die Z-Achse und den Gradienten geht.  $M$  liegt auf der Z-Achse.  $OM$  fällt mit der Z-Achse und der Achsenrichtung zusammen.

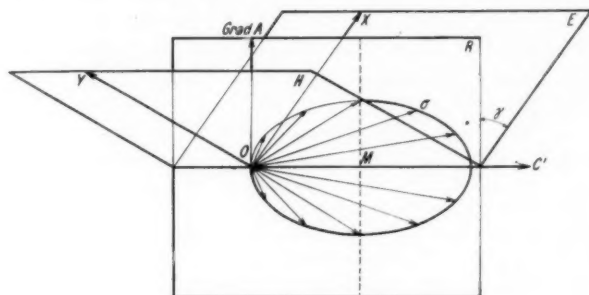


Abb. 7

4.  $\varphi = 0 \quad k \neq 0.$

$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_y = 0$ . Es bleiben nur lineare Schwingungen übrig. Die Phasenverschiebung von  $\mathfrak{H}$  hinsichtlich  $\mathfrak{E}$  ergibt nur einen abweichenden Wert für  $\mathfrak{E}_x$ , nämlich

$$\frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 (1 - \cos 2\Theta - k \sin 2\Theta).$$

Diese besonderen Fälle lassen uns folgendes sehen: Der Kegel des Poyntingschen Vektors kann zu einer Ebene werden. Die Richtung  $OM$  in dieser Ebene, die in unseren folgenden Betrachtungen eine besondere Bedeutung erhalten wird (es wird sich herausstellen, daß sie die Richtung des Lichtstrahls ist), fällt hierbei nur bei allen Schwingungsrichtungen mit der Normale (Z-Achse) zusammen, wenn die Welle zwar inhomogen ist, jedoch nicht absorbiert wird. Bei einer speziellen Schwingungsrichtung, bei der die elektrische Schwingung linear ist und senkrecht auf dem Gradienten steht, fällt auch bei einer absorbierten inhomogenen Welle  $OM$  mit der Z-Achse zusammen.

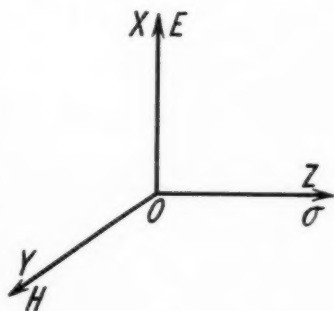


Abb. 8

## 5. Der Zusammenhang zwischen Poyntingschem Vektor und Lichtstrahl

Bei homogenen Wellen in einem durchsichtigen Medium bleibt die Richtung des Poyntingschen Vektors unverändert und fällt mit der Normalen auf der Phasenebene zusammen. Nur die Größe variiert, und zwar wie folgt:

$$(26) \quad \mathcal{S}_z = \frac{c}{4\pi} [\mathcal{E}, \mathcal{H}] = \frac{cn}{4\pi\mu} A_0^2 \sin^2 \Theta = \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 (1 - \cos 2\Theta).$$

Der mittlere Energiestrom durch einen bestimmten Punkt wird dann vorgestellt durch

$$(26a) \quad \varphi = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathcal{S} dt = \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2.$$

Hierbei gibt die Richtung des Vektors gleichzeitig die Richtung des Energiestroms an, so daß der Poyntingsche Vektor dem Lichtstrahl der geometrischen Optik gleichgestellt werden kann und das obenstehende Integral seiner Intensität entspricht.

Bei den absorbierten inhomogenen Wellen beschreibt der Poyntingsche Vektor einen Kegelmantel. Hielten wir nun an der obenstehenden Definition fest, so würde dies zu der unhaltbaren Vorstellung führen, daß der Lichtstrahl ebenfalls diesen Kegel beschreibt. Man muß hierbei bedenken, daß alle genannten Komplikationen prinzipiell auch bereits bei der geringsten Absorption auftreten, so daß dieses Ergebnis dann recht unbefriedigend wäre. Die Schwierigkeit ist sogar bereits bei der absorbierten homogenen Welle vorhanden, obgleich sie dort nicht so ins Auge fällt. Wir fanden hierbei (vgl. Abb. 8) einen Poyntingschen Vektor, der zwar mit der Normale zusammenfällt, aber mit einer Stärke von

$$(26b) \quad \mathcal{S}_z = \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 (1 - \cos 2\Theta - k \sin 2\Theta).$$

Dieser Ausdruck wird periodisch negativ.

Hier ist der Energiestrom also während eines Teils der Schwingungsdauer dem Lichtstrahl entgegengesetzt. Auch diese Erscheinung bildet eine Schwierigkeit, wenn man den Poyntingschen Vektor und den Lichtstrahl einander gleichstellen will.

Nun wir einmal diese Schwierigkeiten kennen, geben sie uns eine auf der Hand liegende Lösung an. In all diesen Fällen kann man den Poyntingschen Vektor in einen konstanten Vektor  $OM$  und einen periodisch veränderlichen zerlegen.

$$(27) \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_c + \mathcal{S}_{\text{per.}}$$

Der konstante Vektor ist, was seine Richtung und Größe anbetrifft, unveränderlich; er ist daher dem Lichtstrahl gleichzustellen. Dies

gilt sogar auch für die homogenen, nicht absorbierten Wellen nach (26) und (26 a).

Man kann dies natürlich auch so formulieren, daß man Richtung und Intensität des Lichtstrahls wiedergibt durch das mittlere Zeitintegral des Poyntingschen Vektors; dabei muß diese Integration dann vektoriell erfolgen.

Im allgemeinen Fall (Kegelmantel) erhält man auf diese Weise für den Lichtstrahl eine Richtung, die niemals von dem Poyntingschen Vektor eingenommen wird, und die im allgemeinen nicht mit der Wellennormale auf der Phasenebene zusammenfällt.

Aus den Formeln (23) und (24) finden wir für die Komponenten:

$$(27a) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{cx} = \frac{-2k^2 \operatorname{tg} \varphi}{1+k^2} \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 & \mathcal{E}_{\text{per.}x} = A_1 \cos \gamma \sin(2\Theta - \delta_1) \\ \mathcal{E}_{cy} = 0 & \mathcal{E}_{\text{per.}y} = A_1 \sin \gamma \sin(2\Theta - \delta_1) \\ \mathcal{E}_{cz} = \frac{1+k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1+k^2} \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 & \mathcal{E}_{\text{per.}z} = A_3 \sin(2\Theta - \delta_3). \end{cases}$$

Die periodische Komponente des Poyntingschen Vektors beschreibt also im allgemeinen eine Ellipse in der Ebene, die durch die Normale auf der Phasenebene und durch die Gradientrichtung in der Phasenebene geht, wobei  $O$  der Mittelpunkt der Ellipse ist. Diese Ellipse ist außerdem, was ihre Form und Achsenrichtungen betrifft, der im vorigen Abschnitt bestimmten Leitkurve des Kegels vollkommen gleich. Ist die Welle nicht inhomogen, so wird diese Ebene unbestimmt, doch gleichzeitig wird die Schwingung linear (Abb. 8). Die Achsen der Ellipse fallen im allgemeinen nicht mit den genannten Richtungen zusammen (Abb. 5 und 6). Dies ist nur der Fall, wenn eine inhomogene Welle in einem nicht absorbierenden Medium fortschreitet (Abb. 7).

Die konstante Komponente des Poyntingschen Vektors liegt im allgemeinen nicht in der Ebene der periodischen. Dies ist nur der Fall bei den Hauptschwingungsrichtungen (Abb. 5 und 6) und bei fehlender Absorption oder Inhomogenität (Abb. 7 und 8).

Aus (27 a) und (21 d) folgt, daß die konstante Komponente dieselbe Richtung hat wie die Schnittlinie der Ebenen der elektrischen und magnetischen Vektoren, und so sind wir zu einem logischen, einfachen Ganzen gekommen (Abb. 9).

Die  $\mathcal{E}$ -,  $\mathcal{H}$ - und  $\mathcal{E}_{\text{per.}}$ -Vektoren beschreiben Ellipsen in drei Ebenen, die einander im allgemeinen in drei willkürlich orientierten Linien  $ON$ ,  $OL$ ,  $OR$  schneiden. In jeder Ebene werden die Winkel zwischen zwei dieser Schnittlinien durch die Achsenrichtungen der darin liegenden Ellipsen halbiert. (Nun diese Richtungen gefunden sind, läßt sich dies n. l. auch für die  $E$ - und  $H$ -Ellipse ableiten.)

Der Lichtstrahl ist stets die Schnittlinie der  $E$ - und  $H$ -Ebenen. Diese bildet mit der Normale einen Winkel  $\zeta$  [vgl. (27a)]:

$$(28) \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{2k^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{1 + k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}.$$

Ihre Intensität ist:

$$(28a) \quad J = \sqrt{\mathfrak{E}_{cx}^2 + \mathfrak{E}_{cz}^2} = \frac{cn}{8\pi\mu} A_0^2 \frac{\sqrt{4k^2 + (1 - k^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma)^2}}{1 + k^2}.$$

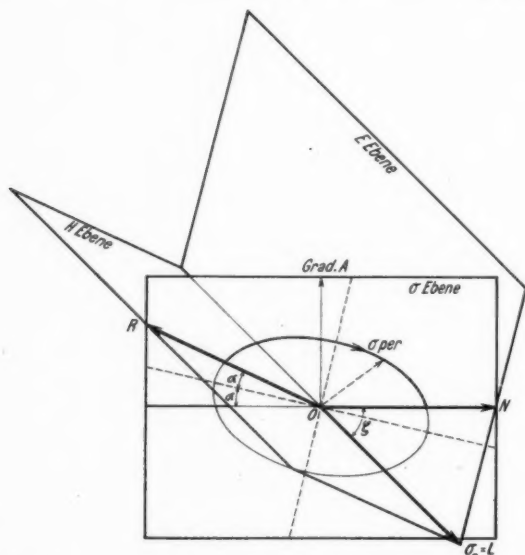


Abb. 9. Die Flächen des elektrischen, magnetischen und periodischen Poynting-schen Vektors schneiden einander in drei Richtungen:  $N$  (normal auf der Phasenebene),  $L$  (Lichtstrahl) und  $R$ , die eigentlich die natürlichen Koordinaten dieser Wellen bilden

Nach Einführung von  $k \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{q} \sin^2$  der Einfluß der Absorption  $k$  und der der Inhomogenität  $b$  in diesem Endergebnis wieder getrennt. Bei  $b = 0$  gehen diese Ausdrücke wiederum über in die Gleichungen für homogene Wellen [vgl. Formeln (26)], gleichgültig, welchen Wert die Absorption hat. Der Lichtstrahl fällt nur mit der Normalen zusammen, wenn mindestens eine der Größen  $k$ ,  $b$  oder  $\cos \gamma$  gleich Null ist.

#### 6. Die Energiebilanz

Wir sind so ausführlich auf den Zusammenhang zwischen Poynting'schem Vektor und Lichtstrahl eingegangen, weil wir

nicht der Auffassung beistimmen können, daß die Z-Komponente des Poyntingschen Vektors der Lichtstrahl ist und die X-Komponente einen in der Phasenebene laufenden Energiestrom darstellt, der vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet eigentlich eine schwierig zu erklärende Nebenerscheinung sein soll<sup>1)</sup>. Die Unhaltbarkeit dieser Auffassung ergibt sich direkt aus der Tatsache, daß der so definierte Lichtstrahl der Energiegleichung nicht genügt. Diese lautet wie folgt:

$$\iiint \sigma \mathfrak{E}^2 dV dt = - \iiint \operatorname{div} \mathfrak{S} dV dt = - \iint \mathfrak{S}_n dS dt,$$

d. h. die in einem bestimmten Volumen absorbierte Energie muß gleich sein der Verminderung des durch dieses Volumen gegangenen Energiestromes.

Wir werden dies für  $\mathfrak{S}_x$  und  $\mathfrak{S}_z$  gesondert untersuchen, zu denen, nach der Definition von  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{E}_x$  gehören. Als Volumen nehmen wir einen Würfel mit einer Kantenlänge  $\lambda$ . Die in diesem Volumen von  $\mathfrak{E}_x$  absorbierte Energie nennen wir

$$\int_0^\lambda \int_0^\lambda \int_0^\tau \sigma \mathfrak{E}_x^2 dt dx dy dz \equiv Q.$$

Mit Hilfe von (20a) und (23) finden wir dann hierfür eine komplizierte Funktion von  $q''$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  und  $A_0^2$ .

Außerdem finden wir

Absorption $\iiint \sigma \mathfrak{E}^2 dV dt$	Strahlungsverlust $-\iint \mathfrak{S}_n dS dt$	Absorption — Strahlungsverlust
$\mathfrak{E}_z$ $Q$	$\mathfrak{S}_z \left( 1 - \frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2} \right) Q$	$+\frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2} Q$
$\mathfrak{E}_x$ $\frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2} Q$	$\mathfrak{S}_x \frac{2k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2} Q$	$-\frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2} Q$

(Hierbei kann gezeigt werden, daß stets  $0 < \frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 + k^2} < 1$ .)

Die Komponenten  $\mathfrak{S}_x$  und  $\mathfrak{S}_z$  genügen also jeder für sich allein nicht der Energiegleichung. Dies tut nur ihre Summe, und es ist deutlich, daß der neu definierte Lichtstrahl dies ebenfalls tut. Auch aus diesem Grunde müssen wir einen Lichtstrahl annehmen, der im allgemeinen nicht mit der Wellennormalen zusammenfällt. Dies führt jedoch bei natürlichem Licht zu einer Komplikation. Denken wir uns eine inhomogene Welle mit konstanter Gradientrichtung, bei

1) Vgl. W. König, a. a. O. S. 197 u. 206.

der sich die Richtung der elektrischen Vektorkomponente in der Phasenebene fortwährend ändert, so wird zu jeder Richtung dieser Komponente eine andere Strahlenrichtung gehören. All diese möglichen Strahlenrichtungen bilden einen Kegel, der jedoch nicht kontinuierlich durchlaufen wird. Der Lichtstrahl ist für natürliches Licht unbestimmt.

#### 7. Die optischen Größen $n$ und $k$

Wir kehren wieder zurück zu den in Abschn. 3 abgeleiteten Beziehungen (14b)

$$n^2 \left( 1 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} \right) = n_0^2 (1 - k_0^2) \quad \text{und} \quad n^2 k = n_0^2 k_0,$$

bei denen wir nun die Einsicht gewonnen haben, daß der aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit per Definition

$$n = \frac{c}{c'}$$

berechnete Brechungsindex für die Normale (Fortpflanzungsrichtung) und nicht für den Lichtstrahl (Energiestrom) gilt.

In erster Linie möchten wir darauf hinweisen, daß diese Ausdrücke von der Schwingungsrichtung unabhängig sind. Ferner können wir hieraus die optischen Größen  $n$  und  $k$ , das sind Brechungsindex und Absorptionsindex, für einen willkürlichen Brechungswinkel bestimmen und durch die Konstanten  $n_0$  und  $k_0$  für homogene Wellen ausdrücken.

$$(29) \quad \begin{cases} n^2 = \frac{1}{2} \{ n_0^2 (1 - k_0^2) + \sqrt{n_0^4 (1 - k_0^2)^2 + 4 n_0^4 k_0^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \} \\ k = \frac{1}{2 k_0} \{ -(1 - k_0^2) \cos^2 \varphi + \sqrt{(1 - k_0^2)^2 \cos^4 \varphi + 4 k_0^2 \cos^2 \varphi} \}. \end{cases}$$

Beide sind vom Brechungswinkel  $\varphi$  abhängig. Theoretisch würden für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $n = \infty$  und  $k = 0$  werden können, aber hierin liegt gerade die Ursache, weshalb man dies nicht verwirklichen kann. Denn  $n = \infty$  bedeutet, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich Null ist.

Die Wellenlänge der inhomogenen Welle ändert sich im umgekehrten Verhältnis zu  $n$ . Auch der Absorptionskoeffizient  $q''$  ist keine Konstante, denn es ist:

$$q'' = q' k = \frac{p k}{c'} = \frac{p n k}{c} = \frac{2 \pi n k}{\lambda_0} = \frac{2 \pi n_0^2 k_0}{n \lambda_0}.$$

Hierin ist der Wert von  $n$  aus (29) einzusetzen.

Ohne aus dem Brechungsgesetz  $\sin i = n \sin \varphi$  die Größe von  $\varphi$  berechnet zu haben (dies wird im Abschn. 8 geschehen), können wir

aus dieser Zunahme von  $n$  mit  $\varphi$  doch bereits die folgende Schlußfolgerung ziehen. Wir betrachten die Brechung aus einem durchsichtigen Medium in ein absorbierendes, mit niedrigerem Brechungsindex. Wäre das zweite Medium durchsichtig, so würde man in

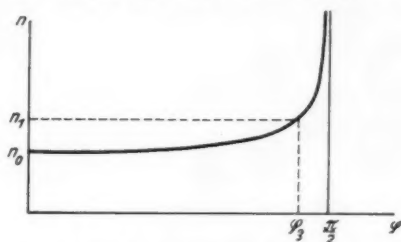


Abb. 10. Änderung des Brechungsindex mit dem Brechungswinkel in einem absorbierenden Medium, nach (29)

dem ersten Medium einen Grenzwinkel  $g$  haben, bei dem die Normale unter  $90^\circ$  gebrochen wird. Hierüber hinaus würden in erster Annäherung keine Strahlen mehr in das zweite Medium vordringen können (Abb. 11a).

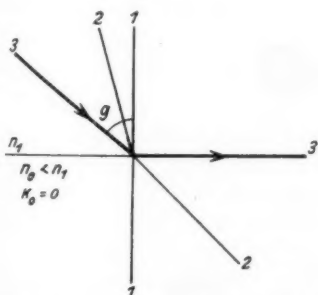


Abb. 11a. Übergang in ein durchsichtiges Medium mit niedrigerem Brechungsindex-Grenzwinkel  $g$  im ersten Medium. Ungebrochener Strahl senkrecht auf der Grenzebene

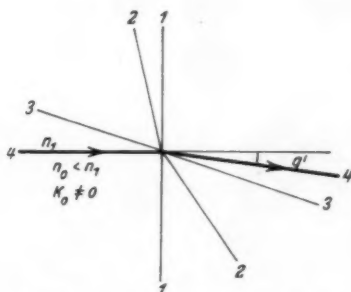


Abb. 11b. Übergang in ein absorbierendes Medium mit niedrigerem Brechungsindex. Das zweite Medium hat einen Grenzwinkel  $g'$  und eine zweite ungebrochene Normale 3

Ist das zweite Medium dagegen absorbierend, so nimmt sein Brechungsindex bei zunehmenden  $i$  und  $\varphi$  stets zu. Es kommt also ein Augenblick, wo  $n = n_1$  und die hierzu gehörende Normalenrichtung  $\varphi_3$  nicht gebrochen wird. Der dazu gehörende Lichtstrahl kann eine andere Richtung haben (und im allgemeinen sogar nicht in der Einfallsebene liegen). Denn nur in dem besonderen Fall  $\cos \gamma = 0$  (elektrische Schwingung senkrecht auf der Einfallsebene)

fällt der Lichtstrahl mit der Normalen zusammen und kann man also von einem zweiten ungebrochenen Lichtstrahl sprechen.

Bei einem noch größeren Einfallswinkel wird  $n > n_1$ . Die Normalenrichtung wird also unter einem kleineren Winkel gebrochen, so daß schließlich bei  $i = \frac{\pi}{2}$  ein Grenzwinkel  $g'$  im zweiten Medium und nicht im ersten entsteht.

### 8. Das komplexe Brechungsgesetz

Von dem Brechungsgesetz erwarten wir in erster Linie, daß es uns zu jedem Einfallswinkel  $i$  den dazugehörigen Brechungswinkel  $r$  im zweiten Medium gibt. Wir schreiben dies Gesetz:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

Ist das zweite Medium absorbierend, dann stehen wir vor der Schwierigkeit, daß  $n_2$  nicht konstant ist, sondern eine Funktion von  $r$  bildet, wie dies durch die Beziehung (29) angegeben wird. Die im dritten Abschnitt gewonnene Einsicht, daß wir die bei Brechung entstandene inhomogene Welle als eine homogene Welle mit komplexer Normalenrichtung betrachten können, für die das Medium einen komplexen Brechungsindex hat, ermöglicht es uns,

diese Normalenrichtung aus dem Snelliuschen Brechungsgesetz

$$(30) \quad n_1 \sin i = n_2 \sin r = n' \sin r'$$

zu finden. Da  $n' = n_0(1 - ik_0)$  nur durch die Eigenschaften  $n_0$  und  $k_0$  des Mediums bestimmt ist, ist sie von der Inhomogenität und dem Brechungswinkel unabhängig und darf also als Konstante verwendet werden.

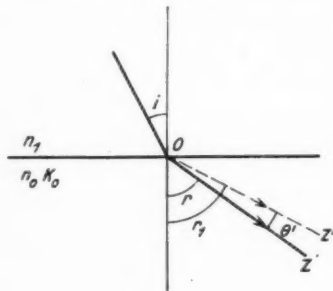


Abb. 12

Wir haben im dritten Abschnitt gesehen, daß diese komplexe Normalenrichtung  $r'$ , gemäß dem

Snelliuschen Gesetz, in der Einfallsebene liegt. Die reelle Normalenrichtung  $r$  unterscheidet sich von  $r'$  durch den Winkel  $\theta'$ . Dies ist der komplexe Drehungswinkel, der zur Erhaltung einer homogenen Welle erforderlich war (vgl. Abb. 12 und 2).

Da  $\theta'$  komplex ist, ist  $r$  dem reellen Teil des komplexen Brechungswinkels  $r'$  nicht gleich.

Wir können die Berechnung von  $r$  wesentlich vereinfachen, indem wir zwei Hilfsgrößen  $a$  und  $b$  einführen, die wir definieren aus:

$$(31) \quad n' \cos r' \equiv a - ib.$$



Wir führen dies in das Brechungsgesetz (30) ein und finden dann

$$n' \cos r' = \sqrt{n'^2 - n_1^2 \sin^2 i} = a - i b^1).$$

Mit dem Wert (14c) für  $n'$  ergibt dies

$$(32) \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = n_0^2(1 - k_0^2) - n_1^2 \sin^2 i, \\ ab = n_0^2 k_0. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \sqrt{\{n_0^2(1 - k_0^2) - n_1^2 \sin^2 i\}^2 + 4n_0^4 k_0^2} \\ \text{und} \quad (32a) \quad \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{\{n_0^2(1 - k_0^2) - n_1^2 \sin^2 i\}^2 + 4n_0^4 k_0^2} \\ \quad + n_0^2(1 - k_0^2) - n_1^2 \sin^2 i], \\ b^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{\{n_0^2(1 - k_0^2) - n_1^2 \sin^2 i\}^2 + 4n_0^4 k_0^2} \\ \quad - n_0^2(1 - k_0^2) + n_1^2 \sin^2 i]. \end{cases} \end{aligned}$$

Hiermit sind  $a$  und  $b$  aus den optischen Konstanten und  $i$  zu berechnen. Mit ihrer Hilfe können wir nun den Ausdruck (29) für  $n_2$  wie folgt schreiben (unter Heranziehung des Brechungsgesetzes):

$$(33) \quad \begin{cases} n_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + 2n_1^2 \sin^2 i + a^2 + b^2) \\ \quad = a^2 + n_1^2 \sin^2 i = b^2 + n_0^2(1 - k_0^2). \end{cases}$$

Das reelle Brechungsgesetz ergibt nun:

$$(34) \quad \sin r = \frac{n_1 \sin i}{n_2} = \frac{n_1 \sin i}{\sqrt{a^2 + n_1^2 \sin^2 i}}.$$

Hiermit ist die gebrochene Normale berechnet.

Tragen wir  $\sin r$  ab in Abhängigkeit von  $\sin i$ , für verschiedene Werte von  $k_0$  und bei Konstanten  $n_1$  und  $n_0$ , so erhalten wir die in Abb. 13 dargestellten Kurven.

Diese Kurven gehen für  $k_0 = 0$  kontinuierlich in die gebrochene Linie  $OAB$  über. Hiervon stellt das Stück  $OA$  den Zusammenhang zwischen  $r$  und  $i$  (nach dem Snelliusschen Gesetz) bis zum Grenzwinkel dar. Der Teil  $AB$  gibt, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, die inhomogene Welle wieder, die bei totaler Reflexion gegen ein nicht-absorbierendes Medium, parallel zur Grenzfläche läuft.

Durch die Absorption wird die Diskontinuität in  $OAB$  abgerundet, aber dies hat zur Folge, daß der Grenzwinkel im ersten Medium verschwindet, prinzipiell sogar bereits bei der geringsten Absorption.

Der Lauf der Kurven zeigt deutlich, daß im zweiten Medium stets eine ungebrochene Normale und ein Grenzwinkel  $g'$  vorhanden sind.

1) Vgl. Abhandlung von W. König, a. a. O., S. 242.

Wir möchten diese besonderen Werte von  $i$  und  $r$  noch berechnen, und zwar aus Formel (34).

Setzen wir hierin  $\sin i = \sin r$ , so finden wir für die ungebrochene Normale:

$$(35) \quad \operatorname{tg}^2 i = \operatorname{tg}^2 r = \frac{n_1^2 \{ n_1^2 - n_0^2 (1 - k_0^2) \} - n_0^4 k_0^2}{n_0^4 k_0^2}$$

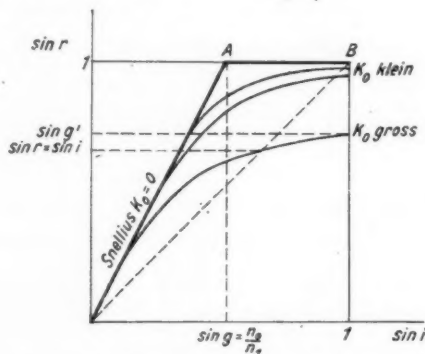


Abb. 13. Das Brechungsgesetz bei einem absorbierenden Medium, mit Brechungsindex  $n_0 < n_1$

und wenn wir  $\sin i = 1$  setzen, für den Grenzwinkel im zweiten Medium:

$$(36) \quad \operatorname{tg}^2 r = \frac{n_1^2}{a^2} = \frac{2n_1^2}{n_0^2 (1 - k_0^2) - n_1^2 + \sqrt{\{ n_0^2 (1 - k_0^2) - n_1^2 \}^2 + 4n_0^4 k_0^2}}$$

Als letzte Anwendung des komplexen Brechungsgesetzes sei noch die Berechnung der Intensität des gespiegelten und gebrochenen Lichtes genannt. Ist das zweite Medium durchsichtig, so folgen aus der Theorie der homogenen Wellen die bekannten Fresnelschen Formeln, die die Amplituden  $R$  der reflektierten und  $D$  der durchgelassenen Schwingungen in der Amplitude  $E$  der einfallenden Schwingung ausdrücken,

Wir wählen nun als Beispiel für die Anwendung des komplexen Brechungsgesetzes die Berechnung von  $R$ , für den Fall, daß die elektrische Schwingung senkrecht auf der Einfallsebene steht. Hierbei ist nach Fresnell:

$$(37) \quad \frac{R}{E} = - \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$

Wenn nun das zweite Medium absorbierend ist ( $k_0$ ), so nehmen wir den Winkel  $r'$  komplex und gehen auf diese Weise auf die komplexe Normalenrichtung über.

$$\frac{R}{E} = \frac{\sin(r' - i)}{\sin(r' + i)}$$

Wenn man dies entwickelt und das komplexe Brechungsgesetz einführt, so erhält man:

$$\frac{n_1 \cos i - n' \cos r'}{n_1 \cos i + n' \cos r'} \quad \text{oder} \quad \frac{n_1 \cos i - a + b i}{n_1 \cos i + a - b i}$$

Nach dem Vorstehenden müssen wir hieraus den reellen Teil entnehmen und haben so gefunden:

$$(38) \quad \frac{R^2}{E^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2a n_1 \cos i + n_1^2 \cos^2 i}{a^2 + b^2 + 2a n_1 \cos i + n_1^2 \cos^2 i}$$

Für die Berechnung der Intensität dieser homogenen Welle aus der Amplitude  $R$  verweisen wir auf die Abschn. 1 und 5.

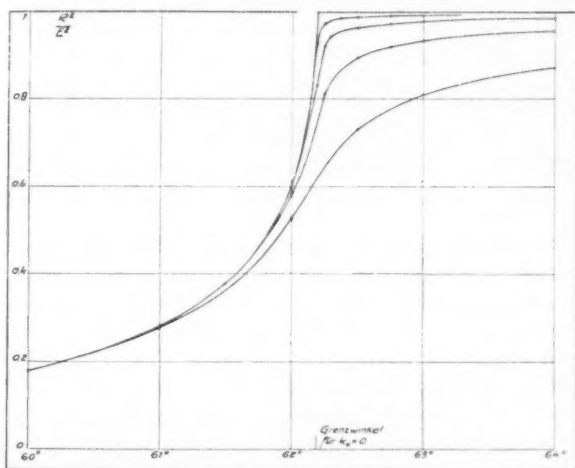


Abb. 14. Intensität  $J$  des gegen ein absorbierendes Medium reflektierten Lichtes als Funktion des Einfallswinkels  $i$ , ber. nach Formel (38).

Kurve	$k_0$	Grenzwinkel $g$
1	$k_0 = 0$	
2	$k_0 = 1 \cdot 10^{-4}$	
3	$k_0 = 3,16 \cdot 10^{-4}$	
4	$k_0 = 10 \cdot 10^{-4}$	
5	$k_0 = 31,6 \cdot 10^{-4}$	

In Abb. 14 stellt die Kurve 1 die Fresnellsche Formel (37) dar. ( $k_0 = 0$ ), in der Nähe des Grenzwinkels  $g$ . Der Intensitätsverlauf des reflektierten Strahles hat in Punkt  $A$  beim Grenzwinkel eine Diskontinuität. Der Einfluß der Absorption  $k_0$  des zweiten Mediums ist aus dem Verlauf der anderen Kurven zu ersehen, welche nach Formel (38) berechnet sind. Bereits bei der geringsten Absorption verschwindet die Diskontinuität wieder, so daß auch im reflektierten Licht das Verschwinden des Grenzwinkels sichtbar wird.

Da das Prinzip der Refraktometer zur Bestimmung der Brechungsindizes von Flüssigkeiten auf dem Vorhandensein und der Messung des Grenzwinkels beruht, ist es deutlich, daß das Verschwinden des Grenzwinkels bei absorbierenden Flüssigkeiten Schwierigkeiten verursacht.

Wir wählten dieses Beispiel, weil diese Schwierigkeiten den Anlaß zu der Analyse der Eigenschaften inhomogener Wellen gaben. Die in der Abb. 14 eingezeichneten Kurven sind für bestimmte, normal vorkommende Werte von  $n_1$  und  $n_0$  berechnet, und es ist auffallend, daß die angegebenen sehr kleinen Werte von  $k_0$  hier bereits solch einen großen Einfluß haben, obgleich  $k_0$  in allen Formeln sogar in der zweiten Potenz vorkommt. Man muß hierbei jedoch bedenken, daß in der Nähe des Grenzwinkels der Brechungswinkel  $r$  beinahe ein rechter Winkel wird, so daß die Inhomogenität der gebrochenen Welle  $k \operatorname{tg} r$  doch so groß ist, daß eine merkliche Abweichung von den Brechungs- und Spiegelungsgesetzen erhalten wird. Über die experimentellen Untersuchungen hierüber wird an anderer Stelle von H. Littmann, Jena noch berichtet.

#### 9. Komplexe Brechung in durchsichtigen Medien (bei totaler Reflexion)

Schließlich möchten wir noch das Licht betrachten, das bei totaler Reflexion an einem durchsichtigen Medium in dieses Medium eindringt. Hierbei kommen einige der in den vorstehenden Abschnitten entwickelten Gedanken zur logischen Anwendung.

Bereits in Abschn. 8 sahen wir, daß die Reflexion an einem absorbierenden Medium nicht total ist. Wir betrachten nun aber zwei durchsichtige Medien, für die das Snelliussche Gesetz

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

gilt, während wiederum  $n_2 < n_1$  ist. Für Werte von  $i$ , die größer sind als der Grenzwinkel, wird  $\sin r > 1$ , also  $r$  wird komplex. Wenn wir schreiben:

$$\sin r' = \frac{n_1 \sin i}{n_2} \equiv m > 1$$

so finden wir aus der Eulerschen Formel:

$$(39) \quad r' = \frac{\pi}{2} - i \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

Das besagt also, daß der gebrochene Strahl bei totaler Reflexion einen komplexen Winkel mit der Normalen auf der Grenzfläche bildet, und zwar so, daß der reelle Teil des Brechungswinkels für alle Werte von  $i > g$  konstant und rechtwinklig ist. Bei zunehmendem  $i$  wird nur der imaginäre Teil größer.

Nun kann nach dem in Abschn. 2 Abgeleiteten eine inhomogene Welle in einem durchsichtigen Medium aufgefaßt werden als eine homogene Welle, deren Normale mit der reellen Strahlrichtung einen imaginären Winkel  $\Theta'$  bildet. Wir können daher umgekehrt aus Beziehung (39) schließen, daß der bei „totaler Reflexion“ auftretende gebrochene Strahl durch eine an der Grenzebene im zweiten Medium entlang laufende inhomogene Welle verursacht wird. Wir schreiben (39)

$$(40) \quad \begin{cases} r' = r + \Theta', & \text{so daß also} \\ r = \frac{\pi}{2}, \\ \Theta' = -i \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}); \end{cases}$$

$r$  ist der reelle Brechungswinkel, der für alle Werte  $i > g$  konstant  $\pi/2$  ist.

$\Theta'$  ist der Winkel zwischen der reellen inhomogenen und der komplexen homogenen Strahlrichtung. Dieser variiert mit  $m$  und also auch mit  $i$ . Wir ersehen hieraus, daß die Inhomogenität umso größer wird, je mehr der Einfallswinkel zunimmt.

Im zweiten Abschnitt haben wir nun zwei Beziehungen abgeleitet, die es uns ermöglichen, die Inhomogenität und die Wellenlänge der inhomogenen Welle aus  $\Theta'$  zu berechnen, und zwar handelt es sich um

$$(4) \quad \frac{\epsilon \mu}{c^2} p^2 = q^2 - b^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \Theta' = \frac{ib}{q} = \frac{ib\lambda}{2\pi},$$

in der  $b$  und  $\lambda$  die gesuchten Größen sind. Wir schreiben (4) erst noch:

$$q^2 - b^2 = \frac{\epsilon \mu}{c^2} p^2 = \frac{n_2^2 p^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} = q_2^2.$$

Hierin gelten  $n_2$ ,  $\lambda_2$  und  $q_2$  für homogene Wellen im zweiten Medium, sind also Konstanten des Mediums. Wir drücken nun  $q$  und  $b$  beide in  $\Theta'$  wie folgt aus:

$$(41) \quad \begin{cases} \sin \Theta' = \frac{ib}{\sqrt{q^2 - b^2}} = \frac{ib}{q_2} \quad \text{oder} \quad b = -iq_2 \sin \Theta' \\ \cos \Theta' = \frac{q}{\sqrt{q^2 - b^2}} = \frac{q}{q_2} \quad \text{oder} \quad q = q_2 \cos \Theta'. \end{cases}$$

Aus dem Wert (40), der das Brechungsgesetz für  $\Theta'$  ergibt, folgt mit Hilfe der Eulerschen Formel:

$$(42) \quad \sin \Theta' = \frac{1}{i} \sqrt{m^2 - 1} \quad \cos \Theta' = m.$$

Kombinieren wir (41) mit (42), so finden wir für die Inhomogenität

$$(43a) \quad b = -q_2 \sqrt{m^2 - 1} = \frac{-2\pi}{n_2 \lambda_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2 i - n_2^2}$$

und für die Wellenlänge  $\lambda$  der inhomogenen Welle

$$(43b) \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{m} = \frac{n_2 \lambda_1}{n_1 \sin i}.$$

Bei dem Grenzwinkel ist  $n_1^2 \sin^2 i = n_2^2$ . Die Welle ist dann noch homogen ( $b = 0$ ). Bei größerem Einfallswinkel nimmt die Inhomogenität stets zu, während die Strahlrichtung unverändert bleibt. Gleichzeitig wird die Wellenlänge nach (43b) stets kleiner, bis sie schließlich bei  $i = \frac{\pi}{2}$  den Wert  $\lambda_1$  erreicht. Bei streifendem Einfall geht der Strahl also ungebrochen weiter.

Es ist uns nun auch möglich, die Amplitude des gebrochenen Strahls zu berechnen, und zwar aus der entsprechenden Fresnelschen Formel für homogene Wellen. Wir wählen als Beispiel wiederum den Fall, daß die elektrische Schwingung senkrecht auf der Einfallsebene steht. Angenommen, daß  $D$  die Amplitude der durchgelassenen elektrischen Schwingung und  $E_s$  die der einfallenden ist, dann ist

$$\frac{D}{E_s} = \frac{2 \cos i \sin r'}{\sin(i + r')}.$$

Hierin ist für  $i > g$ ,  $r'$  wiederum komplex. Weiter ist wieder  $\sin r' = m$  und  $\cos r' = i \sqrt{m^2 - 1}$ . Nach Substitution nehmen wir den reellen Teil des gefundenen Ausdrucks und finden dann:

$$(44) \quad \frac{D}{E_s} = \frac{2 n_1 \cos i}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}.$$

Hiermit ist der gebrochene Strahl vollständig berechnet und das Ergebnis für die elektrische Schwingung:

$$(45) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_x = E_s \frac{2 n_1 \cos i}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} e^{\frac{-2\pi y}{n_2 \lambda_2}} V_{n_1^2 \sin^2 i - n_2^2} e^{i(p t - q z)} \\ q = \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{n_1 \sin i}{n_2} \end{cases}$$

ist das gleiche, das man sonst auf viel umständlichere Weise ableitet<sup>1)</sup>.

Es läßt sich nun noch etwas über den hierzu gehörenden Poyntingschen Vektor und Lichtstrahl sagen. Wir haben hier nämlich den in Abschnitt 2 erwähnten Fall einer nicht absorbierten inhomogenen Welle, die in den Abschnitten 4 und 5 als besonderer Fall ausführlich behandelt wurde. Wir können das Ergebnis also aufschreiben, ohne die vollständigen elektrischen und magnetischen Schwingungen zu berechnen.

Der Poyntingsche Vektor beschreibt in diesem Fall eine Ellipse durch  $O$  in der Einfallsebene und kann in einen konstanten und

1) Vgl. z. B. die Abhandlung von W. König, a. a. O. S. 231 ff.

einen periodischen Vektor zerlegt werden. Der konstante Vektor liegt parallel zur Grenzebene, und seine Größe ergibt die Intensität des Lichtstrahls.

Die Spitze des periodischen Vektors beschreibt mit doppelter Frequenz eine Ellipse um  $O$  in der Einfallsebene. Diese trägt nicht zur Energieströmung bei.

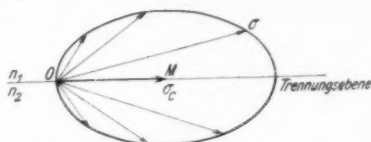


Abb. 15. Der Poyntingsche Vektor in einem Punkt der Trennungsebene beschreibt eine Ellipse durch  $O$ . Das Zeitintegral wird durch  $\mathcal{E}_c$  angegeben

Es ist dieser Poyntingsche Vektor, der in der Literatur als ein Hinundherschwanken der Energie durch die Trennungsebene gedeutet wird<sup>1)</sup>.

Wir ziehen es nach den vorstehend gegebenen Ausführungen vor, nur den konstanten Vektor  $\mathcal{E}_c$  als Energiestrom (Lichtstrahl) anzusehen.

Hiermit ist das Licht, das bei totaler Reflexion in das zweite Medium durchdringt, auf einen normalen, nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochenen Lichtstrahl reduziert, bei dem der Brechungswinkel einen komplexen Wert annimmt.

Führt man in die Fresnelschen Formeln für die Amplitude des gespiegelten Lichts dieselben komplexen Werte von  $r$  ein, so findet man für alle Einfallswinkel, die größer sind als der Grenzwinkel  $R_g = E_g$ , also tatsächlich doch totale Reflexion, obgleich im zweiten Medium ein Energiestrom läuft. Dies ist nur scheinbar mit dem Energiegesetz in Widerspruch.

Die berechneten Intensitäten  $\mathcal{E}_c$  sind stets Energieströme pro Flächeneinheit. Wollen wir das Energiegesetz anwenden, so müssen wir diese integrieren über die Querschnitte der einfallenden, gespiegelten und gebrochenen Lichtbündel. Die Querschnitte der beiden ersten sind immer gleich, das gebrochene Lichtbündel ist in diesem besonderen Fall stets unbegrenzt. Bei zunehmendem Querschnitt des einfallenden Bündels bleibt der Energiestrom im zweiten Medium konstant. Wenn wir den Querschnitt des einfallenden Bündels unendlich groß werden lassen (was in der Theorie stets stillschweigend angenommen wurde), so fällt der Einfluß des Energiestromes im

<sup>1)</sup> Vgl. W. König, a. a. O. S. 232; Cl. Schaefer u. G. Gross, Ann. d. Phys. [4] 32. S. 648. 1910.

zweiten Medium weg, so daß durch *totale* Reflexion also doch dem Energiegesetz entsprochen wird.

Bei begrenzten Lichtbündeln ist also sicherlich eine geringere Reflexion als die totale vorhanden. Ihre Berechnung muß durch eine beugungstheoretische Behandlung erfolgen.

#### Zusammenfassung

Nach einer Analyse der Eigenschaften inhomogener ebener Wellen in einem durchsichtigen Medium wird eine Transformation auf homogene Wellen mit Hilfe einer Achsendrehung um einen imaginären Winkel abgeleitet. Dieselbe Drehung, jedoch um einen komplexen Winkel ergibt die Gleichungen für inhomogene Wellen in absorbierenden Medien. (Bei all diesen inhomogenen Wellen ist die Schwingungsrichtung in bezug auf den Gradienten noch willkürlich.) Hierbei entstehen die Grundgleichungen der Metalloptik aus der Invarianz des komplexen Brechungsindex, und das komplexe Brechungsgesetz erhält eine einfache Bedeutung. Der Zusammenhang zwischen Poyntingschem Vektor und Energiestrom wird untersucht; hierbei beschreibt der Vektor im allgemeinen einen Kegel, während der Energiestrom als das vektorielle Integral definiert wird. Der Energiestrom (Lichtstrahl) fällt dann nur in besonderen Fällen mit der Wellennormalen zusammen.

Es folgen zwei Anwendungen des komplexen Brechungsgesetzes, nämlich das Verschwinden des Grenzwinkels bei Absorption und der gebrochene Strahl bei sogenannter totaler Reflexion (Lichtstrom im zweiten Medium).

Alle Zwischenrechnungen, die teilweise sehr umfangreich waren, sind weggelassen.

Amsterdam, Laboratorium der N. V. de Bataafsche Petroleum Maatschappij.

(Eingegangen 30. September 1939)



**Über die Breite der Quecksilberlinie 2537 Å  
im Spektrum des Funkens unter Wasser<sup>1)</sup>**

**Von F. Aßmus**

(Mit 6 Abbildungen)

**I. Einleitung**

Der unter einer Flüssigkeit erzeugte elektrische Funke ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Auf der einen Seite galt das Interesse seinem Kontinuum. Bezüglich dessen Entstehung sei auf Arbeiten von Finkelnburg (1) verwiesen, nach denen es in Entladungen hoher Stromdichte bei der teilweisen oder vollständigen Abbremsung von Elektronen im Felde positiver Ionen emittiert wird.

Andererseits boten die dem Kontinuum überlagerten Absorptionslinien die Möglichkeit, einen Beitrag zur Aufklärung der Grundzustände von solchen Metallen zu geben, deren Absorptionsspektren sonst nur schwer zu erhalten sind (2).

Das Auftreten der Absorptionslinien auf kontinuierlichem Grund gibt Anlaß zu der Vorstellung, daß der eigentliche Funkenkanal, der das Kontinuum emittiert, von einer Zone geringeren Anregungsgrades („niedrigerer Temperatur“) umgeben ist, in der die Absorption erfolgt. Es besteht also eine gewisse Ähnlichkeit mit den Verhältnissen in den Fixsternen.

Die in der absorbierenden Schicht entstehenden Absorptionslinien vermögen Aufschluß über die dort vorhandenen physikalischen Verhältnisse zu geben; so konnten z. B. mit Hilfe von Banden Temperaturbestimmungen durchgeführt werden. Einen weiteren Einblick gewährt die Form und Breite der Absorptionslinien, die, wie die Untersuchungen über Linienverbreiterung (3) lehren, durch die Gasdichte und evtl. die Temperatur bedingt sind. Ziel dieser Arbeit ist es, aus den Verbreiterungserscheinungen der Absorptionslinien des Funkens unter Wasser Schlüsse auf Druck und Gasdichte in der absorbierenden Zone zu ziehen. Die normalerweise zu beobachtende große Linienbreite von einigen Å-Einheiten legt die Vermutung

1) D 7.

nahe, daß die dort herrschenden Drucke sehr groß sind, doch bestehen Täuschungsmöglichkeiten durch Eigendruckverbreiterung und eine später zu besprechende scheinbare Verbreiterung infolge Überlagerung verschiedener Spektren.

Um unabhängig von diesen Wirkungen die nur durch den Fremddruck bedingte Breite zu ermitteln, wurden Beobachtungen bei sehr verschiedener Konzentration des absorbierenden Gases vorgenommen.

Will man aus der Linienform und Linienbreite auf die physikalischen Bedingungen in der absorbierenden Schicht schließen, so muß man für die Untersuchung eine Linie benutzen, bei der diese Zusammenhänge gut bekannt sind. Die in dieser Hinsicht wohl am eingehendsten untersuchte Linie ist die Quecksilberresonanzlinie bei  $2537 \text{ \AA}$ , sie wurde deshalb für die vorliegende Arbeit benutzt.

Zur Feststellung einiger die Entladung kennzeichnenden Größen wurden ferner Untersuchungen mit dem Drehspiegel ausgeführt.

## II. Experimentelle Anordnung

Die meistbenutzte Wasserfunkenstrecke war ähnlich der von Angerer und Joos (4) beschriebenen gebaut:

Die zum Betrieb der Funkenstrecke dienende Hochspannung wurde von einem  $4,5 \text{ kVA}$ -Transformator geliefert, der sekundärseitig eine Spannung von  $16 \text{ kV}_{\text{eff}}$  gab. Die Schaltung zeigt Abb. 1:

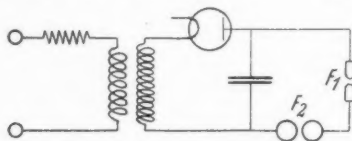


Abb. 1. Schaltung

Der Transformator lädt über einen Gleichrichter eine Kondensatorenbatterie auf, die, wenn an der Luftfunkenstrecke  $F_2$  die Durchschlagspannung erreicht ist, sich über Luft- und Wasserfunkenstrecke  $F_1$  entladet. Die Gesamtkapazität betrug  $0,07 \mu\text{F}$ ,

die Kondensatoren wurden bis  $15 \text{ kV}$  aufgeladen.

Die Leitungen zwischen den Gliedern des hochfrequenten Entladungskreises waren, um die Selbstinduktion klein zu halten, möglichst kurz ausgeführt. Die Frequenz des Entladungskreises betrug, wie Drehspiegelaufnahmen zeigten,  $0,4 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ .

Bei voller Heizung des Glühventils erfolgten etwa 5 Entladungen in der Sekunde. Durch die beschriebene Schaltung wurde erreicht, daß die sonst leicht eintretenden Rückwirkungen zwischen Lade- und Entladekreis, wie sie z. B. bei Kaiser und Wallraff (5) eingehend beschrieben sind, vermieden wurden.

Die Unterwasserfunkenstrecke wurde durch eine Zylinderlinsen-anordnung auf den Spektrographenspalt abgebildet, so daß ein größeres Stück des Spaltes gleichmäßig ausgeleuchtet war. Zur spektralen Zerlegung diente ein früher im Institut gebauter Einprismen-Quarzspektrograph, der von Rühmkorf (6) eingehend beschrieben wurde. Seine Dispersion betrug bei 2537 Å 2,07 Å pro Millimeter. Die Spaltbreite betrug stets  $\frac{1}{100}$  mm.

Zur Erzeugung von Schwärzungsmarken für die Auswertung diente eine Hansensche Stufenblende; ein kleiner Spektrograph, dessen Spalt durch eine Funkenstrecke ersetzt war, ließ annähernd monochromatisches Licht des Spektralgebiets um 2537 Å in die Stufenblendenanordnung fallen; so wurde das Vergleichslicht bezüglich Wellenlänge und Intermitenz dem zu untersuchenden weitgehend angepaßt.

Bei den Drehspiegeluntersuchungen wurde ein parallel zur Drehachse stehender Spalt mit einem lichtstarken Objektiv über den Drehspiegel auf die Platte abgebildet. Die Funkenstrecke wurde dann auf den Spalt abgebildet, und zwar so, daß der Funkenkanal senkrecht zum Spalt verlief. Man erhielt so ein größeres Auflösungsvermögen als ohne den Spalt bei dem verhältnismäßig breiten Funkenkanal zu erreichen gewesen wäre. Der Drehspiegelmotor konnte bis zu 200 Umdrehungen pro Sekunde ausführen, das entspricht einer Bildgeschwindigkeit von etwa 800 m/sec.

### III. Aufnahme und Auswertung

Um auf der photographischen Platte die Formen der Absorptionslinien möglichst ungestört durch die körnige Struktur feststellen zu können, mußte feinkörniges Material benutzt werden. Verwendung fanden Agfa-Kontrastplatten; entwickelt wurde mit Agfa-Finalentwickler; es wurde meist reichlich belichtet und kurz entwickelt. Während der Entwicklung wurden die Platten mit einem Pinsel überstrichen, um Entwicklungsfehler möglichst zu vermeiden.

Die Gesamtbelichtungszeit betrug 3–6 Min.; nach je  $\frac{1}{2}$  Min. mußte jedoch die Belichtung unterbrochen werden, da sich das Wasser trotz starken Zustroms besonders bei quecksilberreichen Elektroden rasch trübte. Vor und nach jeder Aufnahme des Unterwasserfunkenpektrums wurde über dessen Ränder ein Eisen-Bogen-spektrum aufgenommen. Mit Hilfe dessen Linien konnten dann später beim Photometrieren die Absorptionslinien genau parallel zum Photometerspalt gerichtet werden. Nach Aufnahme der Spektren wurden auf jede Platte mit der gleichen Belichtungszeit Intensitätsmarken aufgenommen.

Zur Herstellung der quecksilberhaltigen Elektroden wurden niedrigschmelzende Metalle mit Quecksilber unter Paraffin zusammengeschmolzen, das flüssige Metall in Glasröhrchen passenden Durchmessers hineingesaugt und darin abgekühlt. Es wurden meist Elektroden mit 3 mm Durchmesser benutzt; als Grundmetalle dienten Cadmium, Zinn und Blei.

Besonders sorgfältig mußte darauf geachtet werden, daß nicht vielleicht durch im Zimmer verstreute Quecksilbertröpfchen ein Quecksilbergehalt der Luft und damit eine Absorption auch ohne Amalgamelektroden entstand. Durch ständige Lüfterneuerung konnte dieser Gefahr begegnet werden; wiederholte Kontrollaufnahmen zeigten nie eine Spur von Absorption. Damit trotz der Lüftung während der Aufnahme keine Linienverschiebung durch Temperaturänderungen erfolgen konnte, wurde die Zimmertemperatur durch gesteuerte Heizung bis auf wenige zehntel Grad konstant gehalten.

Der Schwärzungsverlauf in Spektren und Schwärzungsmarken wurde mit einem Zeisschen Registrierphotometer bestimmt. Belichtungs- und Entwicklungsbedingungen waren so gewählt, daß der Schwärzungsbereich der Absorptionslinie meist im linearen Teil der Schwärzungskurve lag. Sonst wurden die Photometerkurven umgezeichnet. Aus den so erhaltenen logarithmischen Intensitätskurven konnten dann die interessierenden Größen: Halbwertsbreite, Maximalabsorption und Gesamtabsorption erhalten werden.

Die so ermittelten Halbwertsbreiten und Maximalabsorptionen bedürfen noch einer Korrektur. Jedes unendlich schmale Wellenlängengebiet des Kontinuums gibt wegen endlicher Spaltbreiten, Abbildungsfehlern usw. auf der Photometerplatte eine Intensitätsverteilung endlicher Breite (Apparatefunktion). Bedeutet  $W(x)$  die wahre Intensitätsverteilung und  $A$  die auf 1 normierte Apparatefunktion, so wird die verzerrte Intensitätsverteilung  $S(y)$  gegeben durch (7):

$$S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) A(y-x) dx.$$

Die Apparatefunktion wurde experimentell durch Aufnahme von Spektren des Nickel-Vakuumbogens ermittelt. Sie ließ sich als Summe einer Dispersionskurve und einer Fehlerkurve darstellen. Es konnte dann für den Fall, daß  $W(x)$  eine Dispersionskurve  $C(x^2 + a^2)^{-1}$  ist, die Differenz zwischen den Halbwertsbreiten von  $S(y)$  und  $W(x)$  mit Hilfe der Integralgleichung ermittelt werden. Es ergab sich, wenn  $b$  die Halbwertsbreite ist und sich der Index auf die wahre, bzw. scheinbare Breite bezieht:

$$b_W = b_S - 0,06 \text{ Å}.$$

Dieser Korrektur entsprechen auf der Platte  $2/100$  mm, während die Spaltbreite von  $1/100$  mm am Plattenort wegen der Schrägstellung eine Breite von  $2/100$  mm verursacht. Die Abbildung leistet also bei Berücksichtigung der Beugung usw. das Bestmögliche.

Für die Maximalabsorption  $T$  betrug die Korrektion

$$T_W = T_s \frac{b_s}{b_W}.$$

Diese Korrekturen sind bei den folgenden Angaben über Halbwertsbreite und Maximalabsorption stets angebracht.

#### IV. Experimentelle Ergebnisse

##### a) Drehspiegeluntersuchungen

Ehe auf die Verbreiterungserscheinungen eingegangen wird, soll über einige Untersuchungen mit dem rotierenden Spiegel berichtet werden. Die mit der im Abschn. II beschriebenen Drehspiegelanordnung gemachten Aufnahmen zeigten durchschnittlich etwa 6—7 Halbwellen, also ebensoviel, wie von Anderson (8) bei den Vakuumentladungen und von S. Smith (9) bei den explodierenden Drähten beobachtet wurden. Man kann daraus schließen, daß die Dämpfung im Funken unter Wasser nicht wesentlich von der in den anderen, äußerlich ganz unähnlichen Entladungen verschieden ist.

Aus den Abständen der Maxima auf den Funkenaufnahmen bestimmt sich die Frequenz des Entladungskreises zu  $0,4 \cdot 10^6$  Hz. Aus der Kapazität und der Aufladespannung berechnet sich dann die maximale Stromstärke zu etwa 2500 Amp. Da der Durchmesser des Entladungskanals, wie Drehspiegelaufnahmen und direkte Aufnahmen zeigen, höchstens  $\frac{1}{2}$  mm beträgt, ergibt sich für die Stromdichte während der ersten Halbwelle ein Wert von über  $10^6$  Amp./cm<sup>2</sup>. Das ist weit mehr, als die Stromdichte von  $3 \cdot 10^4$  Amp./cm<sup>2</sup>, die bei Anderson zum Auftreten eines intensiven Kontinuums notwendig war.

Die Drehspiegelaufnahmen ermöglichten auch eine Abschätzung der Flächenhelligkeit des Funkens. Dazu wurde an die Stelle der Funkenstrecke der positive Krater einer Kohlebogenlampe gebracht, und wie vorher wurden Aufnahmen bei rotierendem Spiegel gemacht. Eine langsam laufende Schlitzscheibe sorgte dafür, daß nur während einer bestimmten, veränderbaren Zahl von Spiegelumdrehungen Licht auf den Spalt fallen konnte. So wurden auf der Platte Felder erhalten, die vom laufenden Bild des Spaltes 4—60 mal überstrichen worden waren. Ihre Schwärzung wurde mit der von den Unterwasserfunkenaufnahmen verglichen und so festgestellt, daß bei Abbildung des Kraters auf den Spalt das Spaltbild etwa 60 mal über die Platte laufen muß, um die gleiche Schwärzung zu erzielen, die der Funke in der ersten Halbwelle erzeugt. Da der Schwarzschildexponent  $\gamma$  im Bereich so großer Beleuchtungsstärken größer als 1 ist, ergibt sich ein noch höheres Verhältnis der Flächenhelligkeiten. Wie sich z. B. aus Angerer (10) ergibt und auch aus eigenen

Messungen folgt, bei denen vor dem Spalt ein Platinstufenfilter bekannter Durchlässigkeiten angebracht war, ist  $\gamma = 1,2$ . Die Leuchtdichte des Funkens während der ersten Halbwelle ist also rund 140 mal größer als die des positiven Kraters der Bogenlampe. Um eine Vorstellung von dieser Zahl zu geben, sei erwähnt, daß sie der Flächenhelligkeit eines schwarzen Körpers von  $12000^\circ \text{K}$  entspricht.

Bei diesen Messungen war das Spektralgebiet nach langen Wellen hin durch die Plattenempfindlichkeit, nach kurzen Wellen zu durch ein Filter begrenzt, so daß die mittlere Wellenlänge etwa  $5500 \text{ \AA}$  betrug.

#### b) Linienbreite

Das Spektrum des Unterwasserfunkens zeigt ein strukturloses Kontinuum, von dem sich Absorptions- und Emissionslinien abheben.

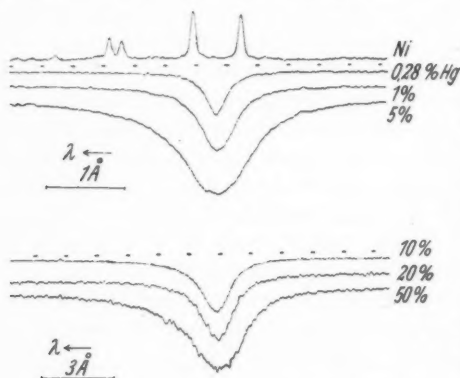


Abb. 2. Photometerkurven bei verschiedener Quecksilberkonzentration. Grundmetall Cadmium

In Emission erschienen stark verbreiterte einige Funkenlinien, ferner einige Bogenlinien der scharfen Nebenserien von Cadmium und Quecksilber. In Absorption erschienen eine große Zahl von Bogenlinien, besonders die vom Grundzustand ausgehenden, ferner die OH-Banden mit den Bandenköpfen bei  $2811$  und  $3064 \text{ \AA}$ . Von den Linien der ionisierten Atome wurde in Ab-

sorption nur das Grunddoublett des  $\text{Ca II}$  beobachtet.

Es wurden zunächst bei einem Quecksilbergehalt von etwa  $10$ – $20\%$  Aufnahmen gemacht. Dabei zeigte es sich, daß die Halbwertsbreite der Linie  $2537 \text{ \AA}$  vom Quecksilbergehalt abhängig war, daß sie mit abnehmendem Quecksilbergehalt sank. Man kann das als eine Eigendruckverbreiterung ansehen. Dann müßte man bei immer mehr abnehmender Quecksilberkonzentration schließlich die allein durch den Fremdgasdruck bestimmte Halbwerte erreichen. Deshalb wurden Aufnahmen von  $50\%$  bis herab zu  $\frac{1}{4}\%$  Quecksilber gemacht. Die Halbwertsbreite sank dabei von  $3 \text{ \AA}$  bis herab zu  $0,28 \text{ \AA}$ . Abb. 2 zeigt eine Reihe von Photometerkurven bei

verschiedenem Quecksilbergehalt. Die Photometerempfindlichkeit wurde hier so gewählt, daß die Maximalausschläge im Verhältnis der Maximalabsorptionen stehen. Die oberste Kurve zeigt zwei Dubletts aus dem Nickelvakuumbogen, die Linien sollen zur Veranschaulichung des tatsächlichen Auflösungsvermögens dienen, ihre Halbwertsbreite beträgt 0,09 Å.

Abb. 3 zeigt die Zusammenhänge zwischen dem Quecksilbergehalt und den charakteristischen Liniengrößen Halbwertsbreite, Maximalabsorption und Gesamtaborption bei einem Quecksilbergehalt von weniger als 10%.

Hier möge kurz einiges über diese Begriffe eingeschaltet werden. Der Absorptionskoeffizient  $n\kappa$  ist definiert durch

$$n\kappa = \frac{\lambda}{4\pi d} \cdot \ln \frac{J_0}{J}$$

Da die Schichtdicke  $d$  nicht exakt angebbar ist, wurde als Absorption die  $n\kappa$  proportionale Größe

$$A = \log \frac{J_0}{J}$$

und als Maximalabsorption

$$T = \log \frac{J_0}{J_{\min}}$$

angegeben. Unter Gesamtaborption ist der Ausdruck

$$F = \int_0^{\infty} A d\lambda$$

verstanden, wobei  $\lambda$  in Zentimetern gemessen ist. Halbwertsbreite heißt das Frequenzintervall, in dem  $\log \frac{J_0}{J}$  größer als  $1/2 T$  ist.

Die in der Abb. 3 eingezeichneten Meßpunkte stellen, mit Ausnahme der zu Blei gehörigen, Mittelwerte dar. Die Größe der Kreise

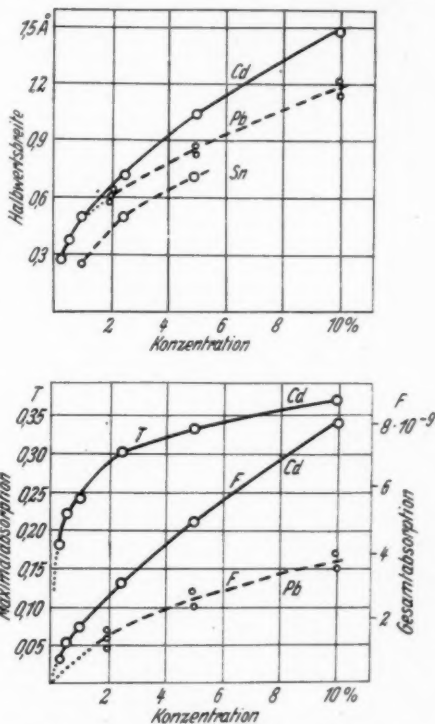


Abb. 3. Beziehungen zwischen Halbwertsbreite, Maximalabsorption, Gesamtaborption und Quecksilberkonzentration der Elektroden



entspricht etwa der bei kleinen Konzentrationen vorhandenen Streuung der Meßwerte. Bei Blei sind, da nur wenige Aufnahmen vorlagen, die Meßwerte selbst eingetragen. Die folgende Tabelle zeigt an einem Beispiel die Reproduzierbarkeit der Meßwerte.

Grundmetall	Hg-Gehalt in %	Breite in Å	Maximalabsorpt. in cm	Gesamtabsorpt. in cm
Cd	1/4	0,34	0,14	0,67·10 <sup>-9</sup>
		0,33	0,15	0,69
		0,32	0,16	0,67
		0,34	0,15	0,80
		0,34	0,15	0,71
Mittel		0,335	0,15	0,70·10 <sup>-9</sup>
Korrigiert		0,28	0,18	0,70·10 <sup>-9</sup>

Aus der Kurve Halbwertsbreite-Konzentration ist der Betrag eines etwa bei kleinen Konzentrationen erreichten Grenzwerts der Breite nicht zu sehen; trägt man aber als Maß für den Quecksilbergehalt die Gesamtabsorption auf, so erhält man eine nahezu gerade Linie, wie Abb. 4 zeigt. Wenn man sie nach kleinen Konzentrationen zu fortsetzt, erhält man eine Grenzbreite von 0,15 Å bei Cadmium; bei Blei scheint dieser Grenzwert etwas höher zu liegen, bei Zinn konnte die Gesamtabsorption wegen einer später zu besprechenden Besonderheit der Linienform nicht genügend genau ermittelt werden, doch deutet Diagramm Halbwertsbreite-Konzentration auf einen kleineren Grenzwert hin, aber auch hier ist der mögliche Fehler der Halbreite größer als bei Cadmium und Blei.

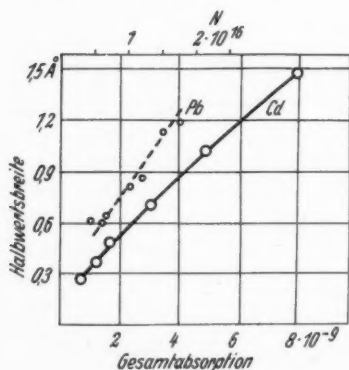


Abb. 4. Abhängigkeit zwischen Halbwertsbreite und Gesamtabsorption

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die durch Fremddruck bestimmte Grenzbreite mindestens eine Zehnerpotenz kleiner ist als die bei normalen quecksilberreichen Elektroden zu beobachtende Linienbreite.

Das zweite Diagramm der Abb. 3 zeigt die Zunahme von Maximalabsorption und Gesamtabsorption mit dem Quecksilbergehalt der Elektroden.

Die gemessene Gesamtabsorption bietet die Möglichkeit, die Zahl der absorbierenden Teilchen



in Kubikzentimetern der absorbierenden Schicht abzuschätzen. Es gilt, wenn  $f$  die Oszillatorenstärke bedeutet,

$$N \cdot f = \frac{4\pi m}{e^2} \int_0^\infty n x d\nu.$$

Mit den früher zusammengestellten Beziehungen erhält man:

$$N \cdot f \cdot d = 4,0 \cdot 10^{21} \int_0^\infty \log \frac{J_0}{J} d\lambda.$$

Für den niedrigsten Meßpunkt bei Cadmium ist die Gesamtaborption gleich  $0,7 \cdot 10^{-9}$  cm, so daß sich ergibt

$$N f d = 2,8 \cdot 10^{12}.$$

Nun ist  $f$  etwa gleich  $1/35$ ; nehmen wir die Dicke der absorbierenden Schicht von derselben Größenordnung wie die Abmessung des leuchtenden Entladungskanals an ( $1/3$  mm), so erhält man  $N = 30 \cdot 10^{14}$  Hg-Atome/cm<sup>3</sup>. Da nun  $d = 1/3$  mm eher zu hoch als zu niedrig gegriffen ist, stellt diese Zahl  $N$  einen Minimalwert dar. Wenn die später zu besprechende Verfälschung durch Überlagerung noch ins Gewicht fiel, würde sich ein noch größeres  $N_{\text{Hg}}$  ergeben. Zur Veranschaulichung der oben berechneten Mindestzahl sei erwähnt, daß sie einem Quecksilberdampfdruck von 0,1 mm Hg, dem Sättigungsdruck bei 82° C entspricht. Die so berechneten Werte für die Quecksilberteilchenzahl pro Kubikzentimeter sind in Abb. 4 für verschiedene Quecksilberkonzentrationen der Elektroden mit eingetragen.

Während bisher nur einige charakteristische Liniengrößen besprochen wurden, soll jetzt einiges über die Form der ganzen Absorptionslinie ausgeführt werden. Ein Blick auf die Photometerkurven der Abb. 2 zeigt die große Symmetrie der Linienform, nur bei großem Quecksilbergehalt macht sich in den Flügeln eine Unsymmetrie bemerkbar, indem im langwelligen Flügel die Absorption stärker ist als im kurzwelligen.

Abb. 5 zeigt Photometerkurven der Quecksilberlinie bei verschiedenen Grundmetallen. Es sind Aufnahmen gleicher Linienbreite herangezogen, die Maximalausschläge sind durch Regeln der Elektrometerempfindlichkeit gleichgemacht.

Um die große Ähnlichkeit des Linienprofils mit einer Dispersionskurve zu zeigen, ist bei der Cadmiumphotometerkurve der Verlauf einer aus Halbwertsbreite und Maximalausschlag berechneten Dispersionskurve durch Kreuze angedeutet; für die Linienmitte und den langwelligen Flügel stimmen die Kurven genau überein, im kurzwelligen Flügel macht sich eine geringe Abweichung bemerkbar. Bei

Blei ist der Verlauf ähnlich, bei Zinn dagegen zeigt sich besonders im langwelligen Flügel ein Anstieg der Intensität über den kontinuierlichen Grund hinaus. Zum Beweis, daß es sich nicht etwa um eine Struktur im Kontinuum des Zinnfunkens handelt, ist darüber die Photometerkurve einer Aufnahme mit Zinnelektroden ohne Quecksilberzusatz abgebildet.

Die Druckverbreiterung von Spektrallinien ist im allgemeinen mit einer Verschiebung des Maximums verbunden. Um eine etwaige

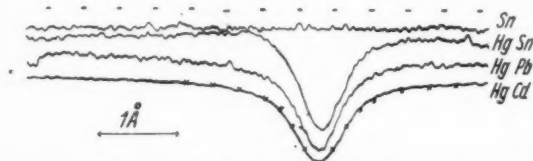


Abb. 5. Photometerkurven bei verschiedenen Grundmetallen

Verschiebung der Absorptionslinie im Funken unter Wasser zu finden, wurde über dessen Spektrum ein Eisenbogenspektrum aufgenommen und dabei die Linien bei  $2537 \text{ Å}$  mit einer kleinen, leicht beweglichen Blende abgedeckt. Dann wurde die Funkenstrecke durch eine Quecksilberbogenlampe ersetzt und eine gleiche Aufnahme gemacht. Die Lampe brannte mit kleinem Strom, belichtet wurde unmittelbar nach dem Zünden. Gemessen wurde dann in beiden Spektren die Abstände zwischen Quecksilberlinien und Eisenlinien. Dabei zeigte sich, daß keine merkliche Verschiebung vorhanden ist, daß eine solche höchstens  $0,03 \text{ Å}$  betragen könnte. Auch das deutet auf einen nicht sehr hohen Fremddruck hin und ist bei den später berechneten Drucken nicht anders zu erwarten (11).

#### V. Besprechung der Ergebnisse

Es hat sich gezeigt, daß die bei quecksilberreichen Elektroden sehr große Linienbreite mit abnehmendem Quecksilbergehalt bis auf einen kleinen Bruchteil sinkt. Es soll in diesem Kapitel aus dem durch Extrapolation erhaltenen Grenzwert der Breite ein Maximalwert für den Druck berechnet werden; dann soll das Abfallen der Breite geklärt und mit den bei mittleren Quecksilberkonzentrationen gemessenen Breiten der wahrscheinliche Wert für den Druck in der absorbierenden Zone berechnet werden. Zuvor müssen aber noch einige Fragen geklärt werden.

##### a) Die Temperatur der absorbierenden Zone

Wenn wir aus der Linienbreite den Druck berechnen wollen, so müssen wir die Temperatur in der absorbierenden Schicht kennen.

Es liegen hierüber zwei Arbeiten vor, die beide die Temperatur mittels der Energieverteilung in Banden bestimmten.

Wilson (12) untersuchte die OH-Bande mit dem Kopf bei 3064 Å, die im Unterwasserfunken stets in Absorption erscheint. Er fand eine Temperatur von 5400° K. Stücklen (13) zog Banden des Kupferhydrids heran und bestimmte aus ihnen die Temperatur größenordnungsmäßig zu 3000° K. Da hier nähere Angaben über die Intensitätsbestimmung der einzelnen Linien fehlen, werden wir dem erstgenannten Wert größeres Gewicht beilegen und roh mit einem Mittelwert von 4500° K rechnen.

#### b) Der Einfluß der Temperatur auf die Linienbreite

Es muß nun noch erörtert werden, wie sich bei konstanter Dichte die Linienbreite mit der Temperatur verändert. Es liegen hierüber zwei experimentelle Untersuchungen vor, die beide die Quecksilberresonanzlinie 2537 benutzen.

Orthmann (14) fand, daß die Linienbreite proportional der Stoßzahl, also mit  $\sqrt{T}$  zunimmt; er erhielt also die Abhängigkeit, die sich aus der Stoßdämpfungstheorie ergibt, wenn der Stoßdurchmesser nicht geschwindigkeitsabhängig ist.

Horodniczy und Jablonsky (15) fanden im Gegensatz hierzu keinen Einfluß der Temperatur auf die Linienbreite.

In beiden Fällen wurde fast dieselbe Zahl von Fremdatomen pro Kubikzentimeter benutzt; daß Orthmann Wasserstoff, Horodniczy und Jablonsky aber Helium verwendeten, kann nicht entscheidend sein, da sich hinsichtlich der Verbreiterungserscheinungen zwischen den verschiedenen Gasen keine wesentlichen Unterschiede zeigen. Aber Horodniczy und Jablonsky benutzten eine rund 30 mal größere Quecksilberkonzentration als Orthmann. Bei ihrer Quecksilberkonzentration von 8,8 mal  $10^{14}$  Quecksilberatomen pro Kubikzentimeter muß aber nach den Arbeiten von Trumpy (16) schon mit einer Eigendruckverbreiterung gerechnet werden, die die Verbreiterung durch das Fremdgas übertrifft. Die reine Fremddruckbreite sollte nach den Ergebnissen von Füchtbauer, Joos und Dinkelacker (11) unter den Bedingungen der Versuche von Horodniczy und Jablonsky weit unter der von ihnen gefundenen Breite von 0,23 Å liegen. Nun ist allerdings von Füchtbauer, Joos und Dinkelacker die Verbreiterung mit Helium als Fremdgas nicht gemessen worden. Es ist jedoch nicht einzusehen, das Helium sich wesentlich anders verhalten soll als die untersuchten Gase Argon, Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Kohlendioxyd und Wasserdampf.

Es ist also zu schließen, daß die durch den Fremddruck bedingte Breite entsprechend den Ergebnissen Orthmanns mit der Stoßzahl zunimmt, daß dagegen bei starker Eigendruckverbreiterung die Halbwertsbreite nur durch die Atomzahl pro Kubikzentimeter, also die relative Dichte bedingt ist.

#### c) Maximalwert des Druckes

Nach diesen Vorbereitungen kann im Anschluß an die Ergebnisse von Füchtbauer, Joos und Dinkelacker (11) aus dem extrapolierten Grenzwert der Breite die relative Dichte in der absorbierenden Zone berechnet werden. (Unter relativer Dichte versteht man das Verhältnis der Dichte des Gases zu seiner Dichte bei 0° C und 1 at.) Nach Füchtbauer, Joos und Dinkelacker besteht bei sehr geringem Eigendruck zwischen der Halbwertsbreite  $b$  und der relativen Dichte  $\rho$  des Fremdgases Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor ist von der Art des Fremdgases abhängig. In der absorbierenden Zone des Unterwasserfunkens haben wir hauptsächlich mit der Anwesenheit von Wasserdampf und seinen Zersetzungsprodukten zu rechnen. Für Wasserdampf gilt

$$b = 0,0227 \rho \text{ \AA}.$$

Bei Füchtbauer, Joos und Dinkelacker betrug die Meßtemperatur  $T_1$  485° K. Die Breite bei einer anderen Temperatur  $T$  ist, entsprechend der größeren Stoßzahl:

$$b = 0,0227 \sqrt{\frac{T}{T_1}} \rho \text{ \AA}.$$

Mit dem für Cadmium ermittelten Grenzwert von 0,15 Å und einer Temperatur von 4500° K für die absorbierende Zone berechnet sich dann für die relative Dichte ein Wert von  $\rho = 2,2$ . Für den Druck erhält man 36 Atm.

Dieser Druck und diese relative Dichte sind als obere Grenzwerte anzusehen, da sie mit der durch lineare Extrapolation erhaltenen Halbwertsbreite von 0,15 Å berechnet wurden. Es ist aber möglich, daß die in Abb. 4 schwach vorhandene Krümmung sich bei kleinen Quecksilberkonzentrationen fortsetzt, so daß ein kleinerer Grenzwert erreicht wird.

Hätte man die bei hohem Quecksilbergehalt ermittelten Halbwertsbreiten direkt für die Druckbestimmung nach obiger Methode herangezogen, so würde man Drucke von Hunderten von Atmosphären erhalten haben.

#### d) Breitenanstieg

Das Ansteigen der Halbwertsbreite mit wachsendem Quecksilbergehalt muß man als Wirkung einer Eigendruckverbreiterung ansehen:

In Abschn. IVb ist berechnet worden, daß bei den Elektroden mit dem geringsten Quecksilbergehalt bereits eine Teilchenzahl von mindestens  $N = 30 \cdot 10^{14}$  Hg-Atome/cm<sup>3</sup> vorhanden war. Schon bei kleineren Quecksilberkonzentrationen ist aber nach Untersuchungen von Trumpy (16) bereits eine starke Verbreiterung durch Eigendruck vorhanden.

Die Trumpyschen Messungen sind unter Bedingungen vorgenommen worden, die denen im Unterwasserfunken ganz ähnlich sind; es war gleichzeitig ein Fremdgasdruck und ein hiergegen kleiner Eigendruck wirksam. Abb. 6 zeigt eine Reproduktion aus der Arbeit von Trumpy; man sieht, wie von einem Grenzwert an, der durch den Fremddruck bedingt ist, die Breite mit steigendem Quecksilbergehalt erst rasch, dann langsamer zunimmt. Der Quecksilbergehalt variiert bei Trumpy zwischen 2 und  $20 \cdot 10^{14}$  Hg-Atome/cm<sup>3</sup>; im Unterwasserfunken sind aber schon bei geringstem Quecksilbergehalt der Elektroden mehr absorbierende Teilchen im Kubikzentimeter enthalten, so daß unbedingt mit einer starken Eigendruckverbreiterung im Funken unter Wasser zu rechnen ist.

Hier sind aber, wie der Vergleich mit Abb. 4 zeigt, die Halbwertsbreiten viel kleiner, als sie nach den Trumpyschen Kurven für 36—10 at bei den entsprechenden Quecksilberkonzentrationen zu erwarten sind. Da jetzt bei hohem Quecksilbergehalt nach dem in Abschn. Vb Besprochenen die Breite nur durch die relative Dichte bedingt ist, muß man schließen, daß in der Absorptionszone des Unterwasserfunkens die relative Dichte noch kleiner ist, als einem Druck von 10 at und der Trumpyschen Versuchstemperatur entspricht. Da bei tieferen Drucken keine der Abb. 6 entsprechende Messungen vorliegen, müssen wir einen einzelnen Meßpunkt Trumpys bei sehr hoher Quecksilberkonzentration heranziehen. Er fand bei  $N = 133 \cdot 10^{14}$  Hg-Atome/cm<sup>3</sup> eine Halbwertsbreite von 0,84 Å unter einem Fremdgasdruck von 1 Atm. Kohlendioxyd bei 385° K. Ein Vergleich mit Abb. 4 zeigt, daß bei dieser Quecksilberkonzentration eine Breite von 0,84 Å mitten zwischen den im Unterwasserfunken bei Blei- und Cadmielektroden gefundenen Breiten liegt. Die

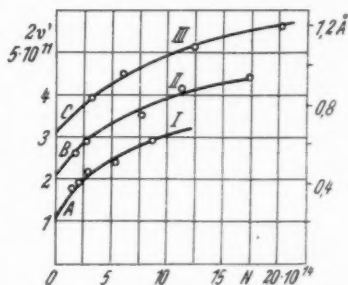


Abb. 6. Beziehung zwischen Halbwertsbreite und Hg-Teilchenzahl.  
I 10 at CO<sub>2</sub>, II 25,5 at CO<sub>2</sub>,  
III 36 at CO<sub>2</sub> [aus Trumpy (16)]

Breite im Funken unter Wasser ist also etwa so groß, wie die bei gleichem Quecksilbergehalt durch Kohlenoxyd von 1 Atm. und  $385^{\circ}\text{K}$  bewirkte. Also sind in beiden Fällen die relativen Dichten gleich und betragen 0,71. Das ergibt für den Unterwasserfunken einen Fremddruck von etwa 12 at.

Nun ist das für den Unterwasserfunken berechnete  $N_{\text{Hg}}$  eher zu klein als zu groß (Absch. IVb); andererseits wirkt nach Fächbauer, Joos und Dinkelacker und Trumpy Kohlenoxyd stärker verbreiternd als andere Gase, z. B. Wasserdampf. Beide Umstände wirken in bezug auf die Größen von relativer Dichte und Druck entgegengesetzt; *wir können so einen Druck von der ungefähren Größe 12 at als wahrscheinlichen Wert für die absorbierende Schicht des Unterwasserfunkens ansehen.*

Doch ist die durch ungenaue Kenntnis der Temperatur bedingte Unsicherheit hier größer als bei der Berechnung des Maximalwerts (Abschn. Vb), da dort die Temperatur nur mit der Quadratwurzel einging.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß die für Druck und relative Dichte in der absorbierenden Zone berechneten Werte räumliche und zeitliche Mittelwerte sind.

Nun sind aber gegen die Ergebnisse Trumpys Bedenken erhoben, da die Theorien die überaus große Wirkung der im Vergleich zu der Zahl von Fremdatomen nur kleinen Zahl von Quecksilberatomen nicht erklären können und auch einen anderen Zusammenhang zwischen Breite und Teilchenzahl geben (3). Es besteht jedoch kein Anlaß, an der Richtigkeit der experimentellen Ergebnisse Trumpys zu zweifeln, zumal auch Horodnizcy und Jablonsky, wie schon in Abschn. 5b besprochen, bei ziemlich hohem Eigendruck und einem dagegen großen Fremddruck einen Wert für die Breite erhielten, der nicht durch den Fremddruck bedingt sein kann, wohl aber mit den Ergebnissen Trumpys in Einklang steht, wenn man dessen Meßpunkt für 1 at  $\text{CO}_2$  heranzieht.

#### e) Überlagerungsbreite

Wir haben die beobachtete Zunahme der Halbwertsbreite mit der Quecksilberkonzentration als Eigendruckverbreiterung gedeutet. Es gibt nun noch einen Effekt, der das gleiche bewirken kann: In der absorbierenden Zone bestehen nicht wie im Absorptionsrohr zeitlich und örtlich konstante physikalische Bedingungen, vielmehr ändern sich während jeder Entladung die emittierte Intensität, die Metaldampfkonzentration und andere Größen mit der Zeit. Es überlagern sich also auf der Platte Spektren, die unter verschiedenen

physikalischen Bedingungen entstanden sind. Hierdurch kann, selbst wenn sich nur die Konzentration des absorbierenden Gases mit der Zeit ändert, eine Zunahme der Halbwertsbreite vorgetäuscht werden.

Über den möglichen Einfluß einer solchen Überlagerungsverbreiterung ist folgendes zu sagen: der durch lineare Extrapolation auf Quecksilbergehalt Null erhaltene Maximalwert für relative Dichte und Druck kann durch diese Fehlerquelle, deren Einfluß im einzelnen nur schwer abzuschätzen ist, in keiner Weise geändert werden, da auch die durch Überlagerung verfälschte Breite mit abnehmendem Quecksilbergehalt gegen die wahre Halbwertsbreite konvergiert. Es könnten höchstens die im Anschluß an Trumpys Messungen gewonnenen Resultate noch etwas erniedrigt werden. Da jedoch entsprechend der hohen Zahl von Quecksilberatomen pro Kubikzentimeter eine starke Verbreiterung durch Eigendruck vorhanden sein muß, ist anzunehmen, daß diese den Hauptanteil an dem beobachteten Breitenanstieg hat.

Mit einer Verbreiterung durch Starkeffekt braucht wegen dessen Kleinheit bei der Quecksilberresonanzlinie nicht gerechnet zu werden.

#### VI. Zusammenfassung

Es wurde die Verbreiterung der Quecksilberabsorptionslinie bei 2537 Å im Spektrum des Funkens unter Wasser untersucht und eine starke Abhängigkeit der Halbwertsbreite von der Quecksilberkonzentration festgestellt. Diese wurde, da sich aus der Gesamtabsorption eine sehr große Zahl von Quecksilberatomen im Kubikzentimeter ergab, im Anschluß an Untersuchungen Trumpys (16) als Eigendruckverbreiterung gedeutet. Bei linearer Extrapolation der Halbwertsbreite auf Quecksilberpartialdruck Null kommt man bei einer aus OH-Banden bzw. CuH-Banden abgeschätzten Temperatur von 4500° K zu einem Fremddruck von etwa 35 at; dies ist ein oberer Grenzwert, da nach Trumpy statt der linearen Fortsetzung mit einem Abfall gemäß einem Wurzelgesetz zu rechnen ist. Unter Zugrundelegung einer Trumpyschen Messung für eine sehr große Quecksilberkonzentration ergibt sich ein Druck von 12 at, der als wahrscheinlicher Wert angesehen wird.

Die im Unterwasserfunken beobachtete große Linienbreite ist also nicht durch einen besonders hohen Fremddruck bedingt, sondern durch Eigendruckverbreiterung bei der sehr hohen Quecksilberkonzentration verursacht.

Drehspiegelaufnahmen des Funkens gestatteten es, Stromdichte und Flächenhelligkeit des Funkenkanals abzuschätzen.



Die vorliegende Arbeit wurde ab Herbst 1936 im Zweiten Physikalischen Institut der Universität Göttingen ausgeführt. Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Joos, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse bei ihrer Durchführung. Für die Überlassung des Drehspiegelaggregates möchte ich Herrn Prof. Dr. Reich danken.

#### Literaturzusammenstellung

- 1) W. Finkelnburg, *Kontinuierliche Spektren*, Berlin 1938, Sammlung, Struktur und Eigenschaften der Materie.
- 2) H. Stücklen, *Ztschr. f. Phys.* **31**. S. 562. 1925; W. F. Meggers u. O. Laporte, *Phys. Rev.* **28**. S. 642. 1926.
- 3) Zusammenfassender Bericht: P. Schulz, *Phys. Ztschr.* **39**. S. 412. 1938.
- 4) E. v. Angerer u. G. Joos, *Ann. d. Phys.* **74**. S. 743. 1924.
- 5) H. Kaiser u. A. Wallraff, *Ann. d. Phys.* [5] **34**. S. 330. 1939.
- 6) H. A. Rühmkorf, *Ann. d. Phys.* [5] **33**. S. 21. 1938.
- 7) A. Unsöld, *Physik d. Sternatmosphären*, Berlin 1938.
- 8) J. A. Anderson, *Astrophys. Journ.* **75**. S. 394. 1932.
- 9) Sinclair Smith, *Astrophys. Journ.* **61**. S. 186. 1925.
- 10) E. v. Angerer, *Wissensch. Photogr*, Leipzig 1931.
- 11) Chr. Füchtbauer, G. Joos u. O. Dinkelacker, *Ann. d. Phys.* **71**. S. 204. 1923.
- 12) D. Wilson, *Journ. Opt. Soc. Amer.* **17**. S. 37. 1928.
- 13) H. Stücklen, *Naturwissensch.* **18**. S. 248. 1930.
- 14) W. Orthmann, *Ann. d. Phys.* **78**. S. 601. 1925.
- 15) H. Horodniczy u. A. Jablonsky, *Nature* **142**. S. 1122. 1938.
- 16) B. Trumphy, *Ztschr. f. Phys.* **40**. S. 594. 1927.

Göttingen, Zweites Physikalisches Institut, Juli 1939.

(Eingegangen 10. November 1939)



# Namenregister zum Jahrgang 1939

5. Folge, Band 34—36

## A

Antonow, G., Die Oberflächenspannung in verschiedenen Aggregatzuständen **35**, 84.

Asmus, Erik, Über die Zähigkeit wäßriger Lösungen starker Elektrolyte höheren Valenztyps **35**, 1. — Die Zähigkeit von Gemischen wäßriger Lösungen starker Elektrolyte mit besonderer Berücksichtigung der Theorie von Onsager und Fuoss **36**, 166.

Aßmus, Fritz, Über die Breite der Quecksilberlinie  $2537 \text{ \AA}$  im Spektrum des Funkens unter Wasser **36**, 737.

## B

Bagge, E., Die Reichweite der Kernkräfte und die Zertrümmerungsprozesse der Ultrastrahlung **35**, 118.

Bartholomeyczky, W., Über den Mechanismus der Zündung langer Entladungsröhre **36**, 485.

Baum, E., Eine neue Lichtquelle zur thermischen Anregung **34**, 377.

Becker, H. E. R., Die Analyse von Niederfrequenz durch Lichtbeugung an Kapillarwellen **36**, 585.

Becker, R., Die Bremsung der Magnetisierung durch mikroskopische Wirbelströme **36**, 340.

Bender, O., Elastizitätsmessungen an Alkalimetall-Einkristallen in tiefer Temperatur **34**, 359.

Beutell, Margot, Intensitätsmessungen an der Hauptserie des Caesiums in einer Caesium-Neon-Entladung **36**, 533.

Boochs, H., Genaue Bestimmung von Gitterkonstanten mittels Elektronenstrahlen bei verschiedenen Kristallitgrößen **35**, 333.

Borgnis, F., Elektromagnetische Eigenschwingungen dielektrischer Räume **35**, 359.

Bott, J., Über das Grenzkontinuum der Natrium-Hauptserie **35**, 314. — Über die Wirkung positiver Ionen auf einen raumladungsbegrenzten Elektronenstrom **35**, 329.

Brauer, Peter, Über Lichtsummenmessung an Mischphosphoren mit gemischtem Leuchtstoff **36**, 97.

Breuninger, H. W., Zur Phasen-anomalie optischer Wellen, insbesondere von Kugelwellen **35**, 228.

Brill, R., Grimm, H. G., Hermann, C. u. Peters, Cl., Anwendung der röntgenographischen Fourier-Analyse auf Fragen der chemischen Bindung **34**, 393.

## C

Cramer, H., Über die Diffusion durch polierte und geätzte Kupferoberflächen **34**, 237.

## D

Dänzer, H., Zur Theorie des Verhaltens magnetischer Momente im magnetischen Drehfeld **35**, 492.

Debye, P., Zur Theorie des Clusius-schen Trennungsverfahrens **36**, 284.

Deutschbein, O., Experimentelle Untersuchungen über die Vorgänge bei der Lichtemission **36**, 183.

## E

Elwert, G., Verschärfte Berechnung von Intensität und Polarisierung im kontinuierlichen Röntgenspektrum **34**, 178.

Erfiling, H. D., Studien zur thermischen Ausdehnung fester Stoffe in tiefer Temperatur. II. (Cr,  $\beta$ -Mn, Mo, Rh, Be, Graphit, Ti, Zr, Bi, Sb, Sn und Beryll) **34**, 136.

Erfiling, H. D. vgl. Grüneisen, E. **36**, 357.

Eucken, A. u. Schröder, E., Das Wärmeleitvermögen einiger verfestigter Flüssigkeiten und Gase (Benzol, Bromwasserstoff, Stickoxydul) **36**, 609.

Ewald, H., Die Analyse und Deutung der Neodymsalzspektren **34**, 209.

## F

Fechner, E. vgl. Schüler, H. u. Gollnow, H. **36**, 328.

Fink, Kurt, Koinzidenzversuche über die Kernumwandlung von Bor durch Protonen **34**, 717.

Fischer, Joh., Zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit und der Temperaturleitfähigkeit aus dem Ausgleichsvorgang beim Schleiermacherschen Meßrohrverfahren und beim Plattenverfahren **34**, 669.

Fischer, V. Zur Thermodynamik der Sauerstoff-Stickstoffgemische **36**, 381.

Fuchs, J. Über eine allgemeine Beziehung zwischen Elementarladung und Wirkungsquantum **36**, 621.

Fünfer, E. Die Anregungsfunktionen der Neutronen aus Beryllium und Bor mit Th C'- $\alpha$ -Strahlen **35**, 147.

Fürth, R., Schwankungserscheinungen an Gammastrahlen. II **34**, 575.

Fues, E., Die Ausbreitungsfäche skalarer Wellen im gitterartigen Medium **36**, 209.

Fuhrmann, H., Messung von Anregungsfunktionen hochsiedender Metalle bei Anregung durch Elektronenstoß **34**, 625.

## G

Gaßmann, Georg, Über den temperaturunabhängigen negativen Faradayeffekt **35**, 638.

Gayling von Altheim, Olga, Das Verhalten von amorphem und kristallisiertem Quarz im elektrostatischen Feld **35**, 417.

Gerö, L., Über die Struktur der Tripletbanden ( $d^3H \rightarrow a^3H$ ) des Kohlenoxyds (mit Versuchsergebnissen der Dissertation von F. Szabó) **35**, 597.

Glosios, T., Bemerkungen zu einer Arbeit von G. Tohmfor und M. Volmer: Keimbildung unter dem Einfluß elektrischer Ladungen **34**, 446.

Goedicke, Egon, Eine Neubestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons nach der Methode von H. Busch **36**, 47.

Gollnow, vgl. Schüler, H., u. Fechner, E. **36**, 328.

Gombás, P., Zur Berechnung der Eigenfunktion und Energie des Grundzustandes des Valenzelektrons in Alkaliatomen **35**, 65. — Berichtigung zu vorstehender Arbeit **36**, 680.

Goos, Fritz, Elektrische Untersuchungen an Zinksulfidkupferphosphoren **34**, 77.

Grassmann, E., Über die Elektronenemission von Kupfer, Silber und Aluminium beim Auftreffen von Ionen großer Geschwindigkeit **35**, 465.

Grimm, H. G. vgl. Brill, R. **34**, 393.

Grüneisen, E. u. Erfling, H.-D., Thermokraft reiner Berylliumkristalle und ihre Änderung im transversalen Magnetfeld **36**, 357.

Gürtler, J., Schwingungserscheinungen an Gammastrahlen. I **34**, 561.

## II

Hahn, O., Einige Besonderheiten der bei der Kernspaltung des Urans und Thors entstehenden künstlichen Atomarten **36**, 368.

Hansen, Heinz †, Die Schwächung monochromatischer Röntgenstrahlen in flüssigem und gasförmigem  $CS_2$ ,  $CH_2Cl_2$  und  $C_2H_5Br$  sowie in gas-

förmigem  $CH_3J$  zwischen 0,1623 und 1,933 Å **35**, 524.

Hellwege, K.-H., Untersuchungen im langwelligen Ultrarot über Kombinationsschwingungen und über die Existenz von Metallhydratkomplexen in Kristallen **34**, 521.

Hermann, C., vgl. Brill, R. **34**, 393.

Hiby, Julius W., Massenspektrographische Untersuchungen an Wasserstoff- und Heliumkanalstrahlen ( $H_2^+$ ,  $H_3^+$ ,  $HeH^+$ ,  $HeD^+$ ,  $He^-$ ) **34**, 473.

Höfert, H.-J., Der Übergang von der Glimmentladung in die Bogenentladung, hervorgerufen durch kurzzeitige Stromstöße **35**, 547.

Holtz, W. u. Müller, R., Untersuchungen über die Vereinigung von Stickstoff und Sauerstoff in der Glimmentladung **34**, 489.

Hund, F., Die chemische Kraft als Wirkung eines Materiefeldes **36**, 319.

## J

Jäger, H., Ein neues Beobachtungsverfahren für stehende Lichtwellen **34**, 280.

Jensen, Peter, Die magnetische Suszeptibilität von Kaliumbromid-Kristallen mit Farbzentren **34**, 161.

Jordan, P., Bemerkungen zur Kosmologie **36**, 64.

Justi, E. u. Kohler, M., Über die elektrische Leitfähigkeit der Alkalimetalle im Magnetfeld **36**, 349.

## K

Kaiser, H. u. Wallraff, A., Über elektrische Funken und ihre Verwendung zur Anregung von Spektren **34**, 297.

- Kanzler, Max, Über die Gültigkeit des Curieschen Gesetzes für Sauerstoff bei hoher Dichte **36**, 38.
- Karweil, J. u. Schäfer, K., Die Wärmeleitfähigkeit einiger schlecht leitender Legierungen zwischen 3° und 20°K **36**, 567.
- Kneser, H. O., Die wahre Schallgeschwindigkeit in Luft **34**, 665.
- Kohler, M., Magnetischer Halleffekt reiner Metalle in tiefen Temperaturen **34**, 23. — Untersuchungen über den Einfluß der Temperatur auf die Röntgeninterferenzen an einatomigen hexagonalen Kristallen **36**, 227. — Kohler, M. vgl. Justi, E. **36**, 349.
- Kornfeld, G., Bemerkung zu der Arbeit „Untersuchungen der Kristallkeime“ (C. Hammer, Ann. d. Phys. [5] **33**, S. 445–458. 1938) **34**, 488.
- Kossel, W. u. Möllenstedt, G., Elektroneninterferenzen im konvergenten Bündel **36**, 113.
- Kossel, W., Raumgitterinterferenzen und Resonanzvorgänge **36**, 189.
- Krutzsch, Carl-Heinz, Über eine experimentell beobachtete Erscheinung an Wirbelringen bei ihrer translatorischen Bewegung in wirklichen Flüssigkeiten **35**, 497.
- Küstner, H., Über die Raumverteilung der Trägerwolken aus Photoabsorption und Streuabsorption bei der Luftionisation durch Röntgenstrahlen. I. Teil **35**, 153. — II. Teil **35**, 193.
- L**
- Lahaye, Heinrich, Messungen der Massenveränderlichkeit sehr schnell bewegter Elektronen **34**, 60.
- Lamla, E., Zur Frage der Umweganregung bei Röntgenstrahlinterferenzen **36**, 194.
- von Laue, M., Bildnis **36**, 189.
- Lehmann, P., Zum Absorptionsspektrum der Praseodymsalze **34**, 389.
- Lompe, A., Seeliger, R. u. Wolter, E., Untersuchungen an Hohlkathoden **36**, 9.
- M**
- Mahler, F., Die Fresnelsche Beugungserscheinung an Ultraschallwellen und ihre Auswertung nach der Methode von Mascart **34**, 689.
- Matthes, Ilse, Untersuchungen über das Verhalten der Höhenstrahlung beim Durchdringen sehr starker Bleischichten **36**, 413.
- Meißner, G. vgl. Meißner, W. **36**, 303.
- Meißner, W. u. Meißner, G., Die gaskinetischen Vorgänge in einem Expansionszylinder **36**, 303.
- Meixner, J., Thermodynamische und kinetische Behandlung der thermoelektrischen Effekte im Magnetfeld **35**, 701. — Einfluß einer Umkehrung des Magnetfeldes auf die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte **36**, 105. — Zur Thermodynamik der thermomechanischen Effekte des Helium II **36**, 578.
- Menz, Helmut, Über den Einfluß eines elektrischen Feldes auf die innere Reibung von Flüssigkeiten **34**, 740.
- Menzel, G., Die Ursache des Fleckenreichtums der Elektronenaufnahmen geätzter Kristalle **36**, 239.

Meyer-Cords, Wilhelm, Die experimentellen Grundlagen für Röntgenabsorptionsmessungen an festen chemischen Verbindungen in Filterpapier **36**, 651.

Möglich, F., Riewe, K.-H. und Rompe, R., Über den Einfluß der Ionisation und Dissoziation auf die spezifische Wärme **35**, 735.

Möllenstedt, G. vgl. Kossel, W. **36**, 113.

Mönch, G., Thermospannung am Element Metall-Halbleiter-Metall. IV. Besprechung experimenteller und theoretischer Ergebnisse für Kupferoxydul **34**, 265. — Photospannung am Element Metall-Halbleiter-Metall. V. Versuche an polykristallinen Kupferoxydulproben bei tiefen Temperaturen **36**, 1. — VI. Die normale Photospannung des inneren lichtelektrischen Effektes **36**, 557.

Molière, G., Zur Theorie des festen Zustandes und des Schmelzpunktes **33**, 577. — Quantenmechanische Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen in Kristallen. I. Ableitung und allgemeine Diskussion der dynamischen Grundgleichungen **35**, 272. — II. Dynamische Theorie der Brechung, Reflexion und Absorption von Röntgenstrahlen **35**, 297. — Ausbau der quantenmechanischen Dispersionstheorie im Sinne eines von M. von Laue stammenden Verfahrens **36**, 265.

Molière, K., Über den Einfluß der Absorption auf den Brechungseffekt der Elektronenstrahlen. II. Versuch eines formalen Absorptionsansatzes im Rahmen der Betheschen Theorie **34**, 461.

Molière, K. vgl. Thiessen, P. A. **34**, 449.

Müller, R. vgl. Holtz, W. **34**, 489.

N

Neuert, H., Über die Winkelverteilung der Trümmer bei einigen Umwandlungsprozessen leichter Atomkerne **36**, 437.

Neumann, V., Absolute Lichtausbeuten, Anregungsfunktionen und Intensitätsverhältnisse im He-, Ne- und Ar-Spektrum bei Anregung durch Atomstoß im Geschwindigkeitsbereich von 0 bis 4500 Volt **34**, 603.

Nie, H., Über die diffuse Streuung schneller Elektronen bei Elektroneninterferenzaufnahmen **35**, 97.

O

Odenwald, R., Reibungsdispersion der Dielektrizitätskonstanten organischer Flüssigkeiten bei sehr hohen Frequenzen ( $\lambda = 15$  cm) **35**, 690.

P

Paschen, F., „Geister“ der Linien von Beugungsgittern **34**, 130.

Peters, Cl. vgl. Brill, R. **34**, 393.

Picht, Joh., Bemerkungen zu einigen Fragen der Elektronenoptik (Elektronenlinse mit Zwischennetz, Elektronenspiegel, Immersionslinse) **36**, 249.

Pick, H., Über die Farbzentren in KCl-Kristallen mit kleinen Zusätzen von Erdalkalichloriden **35**, 73.

Polley, H., Das Einmünden der Magnetisierung in die Sättigung bei Nickel zwischen  $+135^{\circ}\text{C}$  und  $-253^{\circ}\text{C}$ . Temperaturabhängigkeit der Kristallenergie **36**, 625.

## R

Rawer, K., Elektrische Wellen in einem geschichteten Medium. Zur Frage der partiellen Reflexion und zur Berechnung der scheinbaren Höhe von Ionosphärenschichten. **35**, 385.

Riewe, K.-H. vgl. Möglich F. und Rompe, R. **35**, 735.

Riezler, W., Bremsvermögen von Glimmer für Alphateilchen kleiner Reichweite **35**, 350. — Ionisierung und Reichweite von Alphateilchen in Schwefelhexafluorid **35**, 354.

Rössler, F., Strahlungsmessungen an einer Quecksilber-Hockdrucklampe **34**, 1.

Rohde, W., Thermospannung am Element Metall-Halbleiter-Metall III. Temperaturdifferenzabhängigkeit der Thermokraft für Kupferoxydul **34**, 259.

Rompe, R. vgl. Möglich, F. und Riewe, K.-H. **35**, 735.

Ruppel, W., Die Ruhmasse des Elektrons **36**, 521.

## S

Seeliger, R. vgl. Lompe, A. **36**, 9.

Seitter, Willi, Über den Einfluß der Temperatur auf die Erzeugung und

Wiedervereinigung der Träger in Alphastrahlkolonnen **34**, 113.

Slätis, Hilding, Eine neue Methode zur Berechnung der Absorption bei der Meßanordnung von Drude-Coolidge **36**, 397.

Slevogt, Karl E., Dispersion und Absorption elektrischer Wellen in Alkoholen und wäßrigen Lösungen **36**, 141.

Sommerfeld, A., Über die Dimensionen der elektromagnetischen Größen **36**, 335.

Szabo, F. vgl. Gerö, L. **35**, 597.

## Sch

Schaefer, Clemens, Zur Theorie des Schallstrahlungsdruckes **35**, 473.

Schäfer, K. vgl. Karweil, J. **36**, 567.

Scharrer, Ludwig, Kondensation von übersättigten Dämpfen an Ionen. **35**, 619.

Schenkel, G., Das Vektorpotentialfeld stromumflossener Toroide **34**, 541.

Scherzer, O., Das Elektron im Strahlungsfeld. I **34**, 585. — Das Elektron im Strahlungsfeld. II **35**, 665.

Schlechtweg, H., Eine grundsätzliche Bemerkung zum Problem der Beeinflussung der ferromagnetischen Eigenschaften durch mechanische Spannungen **35**, 657.

Schmale, Karl, Absorption im Gebiete kurzer elektrischer Wellen, gemessen an Dipolflässigkeiten und Elektrolyten **35**, 671.

Schmieder, Karl, Bremsvermögen und Trägerbildung der  $\alpha$ -Strahlen in Gasen **35**, 445.

Schröder, E. vgl. Eucken, A. **36**, 609.

Schröder, Hubert, Die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Verunreinigungen in Nichteisen-Legierungen **36**, 71.

Schüler, H., Gollnow, H. und Fechner, E., Über die molekulare Bindungsenergie zwischen atomarem Wasserstoff und Aluminiumatomen im Aluminium **36**, 328.

Schulze, Reinhart, Über Hörschallgeschwindigkeit und -dispersion in Chlor **34**, 41.

Schweickert, H., Thermospannung am Element Metall-Halbleiter-Metall II. Temperaturabhängigkeit (von  $-80^{\circ}$  bis  $+70^{\circ}$  C) der Thermokraft für Kupferoxydul **34**, 250.

St

Stein, Werner, Über die optischen Eigenschaften des Quarzes bei den Wellenlängen  $8-20\ \mu$  **36**, 462.

Streck, E., Über die Zerstörung des Zinksulfids durch  $\alpha$ -Strahlen **35**, 58.

Streitz, Ernst, Über die Zerstörung des Zinksulfids durch Licht und  $\alpha$ -Strahlen **34**, 96.

T

Thiessen, P. A. u. Molière, K. Über den Einfluß der Absorption auf den Brechungseffekt der Elektronenstrahlen I. Messungen des

inneren Potentials an den polaren Tetraederflächen der Zinkblende **34**, 449.

Thordarson, Sveinn, Über die azimutale Intensitätsverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung in dem Spannungsbereich  $60-170\ \text{kV}$ . **35**, 135.

V

Vafiadis, G., Untersuchung des Feldverlaufs im Plattenkondensator mit flüssigem Dielektrikum mittels des elektrooptischen Kerreffekts **35**, 23.

Vetterlein, Pascal, Messungen von elektrischen Anregungsfunktionen an Quecksilber **35**, 251.

Voßnaack, Renate, Über die Bildung von Farbzentren in KJ-Kristallen **35**, 107.

W

Wallraff, A. vgl. Kaiser, H. **34**, 297.

Walter, B., Über die Entstehungsweise der Bahnlinie eines Blitzes und die weiteren Vorgänge in ihr **34**, 644.

Wefelmeier, W., Die merkwürdigen Kerneigenschaften des Samariums und seine Strukturisomerie **36**, 373.

v. Weizsäcker, C. F., Der zweite Hauptsatz und der Unterschied von Vergangenheit und Zukunft **36**, 275.

- Westerdijk, T., Über inhomogene ebene Wellen **36**, 696.
- Wirtz, K., Zur Kinetik der Thermo-diffusion in Flüssigkeiten **36**, 295.
- Wolf, F., Über Stöße doppelt positiver Ionen **34**, 341.
- Wollweber, Gerhard, Über eine neue Methode zur Messung der Abklingung der Phosphoreszenz und ihre Anwendung auf die  $\text{ZnSCdSCu}$ -Phosphore bei Erregung mit Elektronenstrahlen **34**, 29.
- Wolter, E. vgl. Lompe, A. **36**, 9.
- Wrede, W., Die Massenschwächungskoeffizienten monochromatischer Röntgenstrahlen von 24 Elementen zwischen C(6) und Ce(58) für Wellenlängen von 0,1279 bis 1,433 Å **36**, 681.



Phap

✓

5

Du-  
ek-  
  
9.  
ga-  
her  
ten  
Tel-  
s A

eigen  
61.-

- Westerdijk, T., Über inhomogene ebene Wellen **36**, 696.
- Wirtz, K., Zur Kinetik der Thermo-diffusion in Flüssigkeiten **36**, 295.
- Wolf, F., Über Stöße doppelt positiver Ionen **34**, 341.
- Wollweber, Gerhard, Über eine neue Methode zur Messung der Abklingung der Phosphoreszenz und ihre Anwendung auf die  $\text{ZnSCdSCu}$ -Phosphore bei Erregung mit Elektronenstrahlen **34**, 29.
- Wolter, E. vgl. Lompe, A. **36**, 9.
- Wrede, W., Die Massenschwächungskoeffizienten monochromatischer Röntgenstrahlen von 24 Elementen zwischen C(6) und Ce(58) für Wellenlängen von 0,1279 bis 1,433 Å **36**, 681.

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-  
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 428. Band

Kuratorium:

W. Gerlach    F. Paschen    M. Planck  
R. W. Pohl    A. Sommerfeld

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin

Mit 45 Abbildungen im Text



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

LIBRARY

DEC 8 - 1939

DARTMOUTH COLLEGE

# Inhalt

	Seite
Wilhelm Wrede-Göttingen, Die Massenschwächungskoeffizienten monochromatischer Röntgenstrahlen von 24 Elementen zwischen C (6) und Ce (58) für Wellenlängen von 0,1279 bis 1,433 Å. (Mit 2 Abbildungen)	681
T. Westerdijk-Amsterdam, Über inhomogene ebene Wellen. (Mit 15 Abbildungen)	696
F. Abmus-Göttingen, Über die Breite der Quecksilberlinie 2537 Å im Spektrum des Funkens unter Wasser. (Mit 6 Abbildungen)	737
Namenregister zu Band 34—36	753

## Magnetische Felder und Kräfte

mit einer Übersicht über die Vektorenrechnung

Eine mit Zusätzen versehene Sonderausgabe des Beitrages „Elektrodynamik“ aus Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. IV (1920). Von Dr. HERMANN DIESELHORST, Prof. em. der Physik an der Techn. Hochschule in Braunschweig. Mit einem Geleitwort von Dr.-Ing. E. h., Dr. techn. E. h. Fritz Emde, Prof. em. der Elektrotechnik an der Techn. Hochschule in Stuttgart. VI, 216 Seiten mit 56 Abb. im Text. 1930. gr. 8°. Kart. RM. 8.—

Der hier als selbständiges Werk vorgelegte Stoff war bisher in einem Band von mehr als 1300 Seiten vergraben, daher vielen Physikern und Elektrotechnikern praktisch unzugänglich. Es wird deshalb in Fachkreisen begrüßt werden, daß nunmehr diese ergänzte Sonderausgabe vorliegt. Hier ist die Lehre von den magnetischen Feldern und Kräften ausführlicher erörtert, als das in einem Lehrbuch möglich ist, das einen Anfänger in die Elektrizitätslehre einführen soll. Das Ergebnis der Forschungsarbeit auf diesem Gebiete ist hier kritisch verarbeitet. In übersichtlicher Zusammenfassung wird eine Formenlehre der magnetischen Felder gegeben und wohlverständlich vorgetragen. In einem ausführlichen Abschnitt über Vektoren- und Affinorenrechnung steht manches, was anderwärts nicht zu finden ist, und was für die Elektrizitätslehre von größter Wichtigkeit ist. Das Buch wird für lange Zeit allen Magnetikern, Fachingenieuren, technischen Physikern und Elektrotechnikern eine wertvolle Hilfe sein.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

1940 erscheinen die Bände 37—39 der 5. Folge. Bezugspreis je Band zu 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden: Inland RM. 26.—, Porto RM. —.65; Ausland RM. 19.50, Porto RM. 2.—, wenn in Devisen oder freien Reichsmark gezahlt wird. Vorzugspreis für Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für technische Physik je Band: Inland RM. 20.80, Ausland RM. 15.60. Einzelpreis dieses Heftes: Inland RM. 4.—, Ausland RM. 3.—.

Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn *Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grunewald, Marburg/L., Mainzer Gasse 33*, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

